Breve nota sulle proprietà delle operazioni sui numeri naturali

Le proprietà delle operazioni possono essere introdotte "geometricamente" in modo da fornirne una giustificazione intuitiva e una "visualizzazione":
Le proprietà delle operazioni vengono utilizzate, ad esempio:

a. negli algoritmi di calcolo
b. nell'individuazione di percorsi più rapidi di calcolo
c. come supporto al calcolo mentale

Le proprietà delle operazioni si estendono a frazioni e numeri decimali

Introduzione geometrica alle proprietà delle operazioni

addizione: L'addizione gode della proprietà associativa, della proprietà commutativa, dell'esistenza di un elemento neutro (0) e dell'esistenza dell'opposto (per ciascun numero)

La somma di due addendi corrisponde alla giustapposizione (nello stesso ordine) di due aste di lunghezza corrispondente agli addendi.
La proprietà commutativa corrisponde ad osservare che la lunghezza del bastone non varia, se lo ruoto:

3 + 8 = 11 = 8 + 3

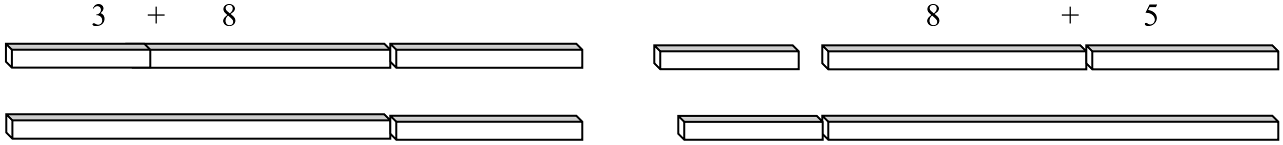
Il ruolo speciale di 0 nell'addizione (è l'elemento neutro, cioè $a + 0$ (= $0 + a$) = a per ogni naturale a) è immediato (perchè sommando 0 non aggiungo "nulla").

La proprietà associativa tratta un problema generalmente non percepito dai bambini: se la somma è rappresentata da una asta, non sembra fare nessuna differenza il fatto che l'asta sia stata ottenuta incollando aste più piccole. Da un punto di vista più formale, la definizione iniziale di somma parla della "somma di due numeri" e non di un numero arbitrario di addendi; ad essere rigorosi, se voglio sommare 3 addendi a, b e c, dovrei specificare in quale ordine eseguire le somme (che coinvolgono solo una coppia di numeri: ad esempio, dovrei scrivere $(a+b) + c$ oppure $a + (b+c)$. La proprietà associativa mi assicura che il risultato è sempre lo stesso, cioè

$$(a+b) + c = a + (b+c)$$

e siamo quindi autorizzati a scrivere $a + b + c$ intendendo una qualunque delle due scritture precedenti (e a generalizzare per una somma di più di 3 addendi).

3 + 8 8 + 5



(3 + 8) + 5 = 11 = 3 + (8 + 5)

Riassumendo: *quando devo calcolare una somma, posso*

- *sostituire due o più addendi con il risultato della loro somma*

- *sostituire un addendo con una somma di addendi (che abbia per risultato l'addendo sostituito)*

Questi sono due aspetti della stessa proprietà.

applicazioni delle proprietà dell'addizione:
a) l'algoritmo dell'addizione: l'usuale algoritmo di somma in colonna sfrutta un percorso del tipo seguito in questo esempio:

47 + <u>24 =</u>	(40 + 7)+ (20 + 4) = (40+20) + (7+4) =
^{1}47 + <u>24 =</u> 1	(40 + 20)+ 11 = (40 + 20)+ 10 + 1 = (40 + 20 + 10)+ 10=
^{1}47 + <u>24 =</u> 7 1	70 + 1 = 71

dove, nell'algoritmo, la scrittura posizionale semplifica la gestione delle decine: le somme svolte nell'algoritmo sono, quindi, sempre somme di più addendi, ciascuno dei quali compreso da 0 a 9.

Esempio: Si dispongono sulla tavola 10x10 le quantità di quadretti relativi a due addendi (ciascuno dei quali maggiore di 10): ad esempio 23 + 18. Il numero 23 risulta in modo naturale scomposto come 10 + 10 + 3, mentre il numero 18 come 10 + 8. La somma iniziale coincide con (10 + 10 + 3) + (10 + 8): riordinando i quadretti in modo da riempire la parte superiore della tavoletta, si scambiano ad esempio le righe con 3 e 10, ottenendo
(10+10+10) + (3+8). Si passa a calcolare la somma delle unità: 3 + 8 = 11, ricavando un'altra riga completa e una unità isolata: 11 = 10 + 1. La riga completa si aggiunge alle altre righe complete (per un totale di 4) : (10+10+10) + (3+8) = (10+10+10) + (11) = (10+10+10) + (10+1) = (10+10+10+10) +1 = 41.

b) la tavola dell'addizione sulle cifre da 0 a 9 è simmetrica rispetto alla diagonale principale (e con tale tavola, insieme al meccanismo dei riporti, si operano tutte le addizioni di numeri naturali)

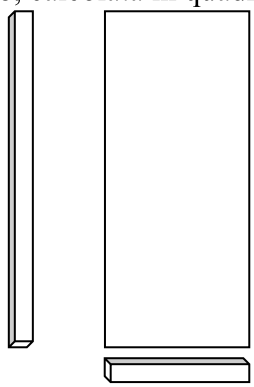
c) semplificazione nei calcoli e, in particolare, nei calcoli mentali:
Ad esempio, nel calcolare 18+ 24 + 2 + 13 + 6, si può procedere calcolando
(18 + 2) + (24+6) + 13

Ancora, nel calcolare mentalmente 17+ 35, si può riflettere che il complemento di 17 alla "cifra tonda successiva" 20 è 3:

$$17 + 35 = 17 + (3 + 32) = (17 + 3) + 32 = 20 + 32 = 52$$

moltiplicazione: La moltiplicazione gode delle proprietà associativa e commutativa, e dell'esistenza dell'elemento neutro 1. La moltiplicazione tra numeri razionali o reali gode inoltre del fatto che ogni numero non nullo ammette un inverso.
La moltiplicazione di due fattori dà come risultato il numero di quadretti di cui è composto il rettangolo avente lati pari (rispettivamente) ad uno dei fattori (con un ordine da stabilire): è l'area del rettangolo, calcolata in quadretti.

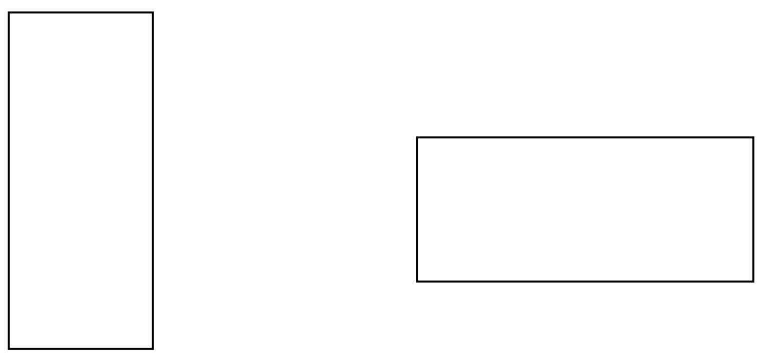
7



3×7

3

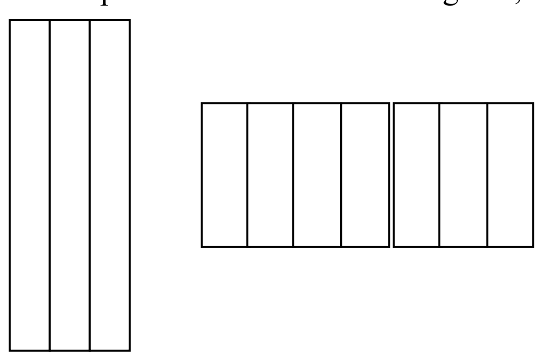
La proprietà commutativa corrisponde ad osservare che il numero di quadretti compresi nel rettangolo non varia, se lo ruoto:



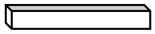
$3 \times 7 = 21 = 7 \times 3$

In particolare, l'area del rettangolo non dipende da come è stato disegnato, ma solo dai sui lati.

Posso anche pensare di aver affettato in modo differente il rettangolo, in strisce parallele ai lati. Una volta decomposte le figure in quadretti, il numero di quadretti coinvolti non varia.

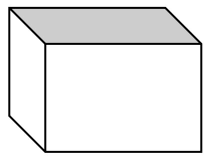


Il ruolo speciale di 1 nella moltiplicazione (è l'elemento neutro, cioè $a \times 1$ $(= 1 \times a) = a$ per ogni naturale a) è immediato, perchè il rettangolo da costruire nella moltiplicazione coincide con l'asta del numero a:

1×3: 

Il ruolo speciale di 0 nella moltiplicazione ($a \times 0$ ($= 0 \times a$) $= 0$ per ogni naturale a) è immediato (perchè non costruisco il rettangolo, visto che un suo lato è nullo).

La proprietà associativa pone riflessioni analoghe a quelle svolte per l'addizione. Una dimostrazione geometrica diretta è più semplice rappresentando il prodotto di 3 fattori come un parallelepipedo aventi i tre fattori per spigoli.



Sezionando differentemente il parallelepipedo, si ritrova che

$$(a\times b) \times c = a \times (b \times c).$$

E` possibile utilizzare la proprietà distributiva:

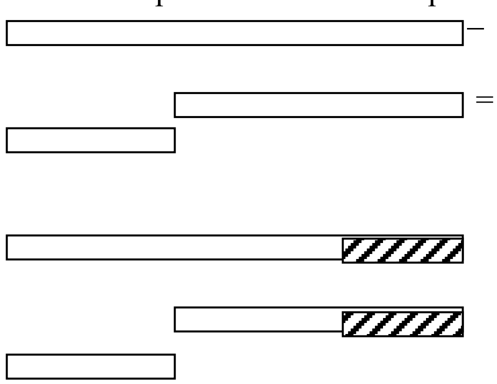
$[a\times b] \times c = [(1+1+....+1) \times b] \times c = (b+b+....+b) \times c = b\times c+\mathbf{bc}+....+b\times c = a \times (b\times c)$.

(ove ogni addendo è ripetuto a volte). Tale percorso può essere rivisitato geometricamente.

applicazioni delle proprietà della moltiplicazione:

a) la tavola pitagorica è simmetrica rispetto alla diagonale principale
b) semplificazione nei calcoli e, in particolare, nei calcoli mentali

sottrazione: **La sottrazione (che non è sempre definita nell'insieme dei numeri naturali) gode della proprietà invariantiva:** sommando o sottraendo la stessa quantità da minuendo e sottraendo, la differenza non cambia. Per ora occorre supporre che la quantità sottratta sia minore o uguale al sottraendo, ma nei numeri reali questo è superfluo e la sottrazione non è più considerata una operazione distinta dall'addizione.



9–

6 =
3

9–2=7

6–2 = 4

7 –
4=
3

applicazioni delle proprietà della sottrazione:

a) la proprietà invariantiva può esser utilizzata per semplificare il calcolo scritto e il calcolo mentale: $65 - 12 = 63 - 10 = 53$

Divisione

proprietà invariantiva: moltiplicando o dividendo per la stessa quantità entrambi i termini della divisione, il risultato non cambia.
Nella divisione tra numeri reali, vale anche la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma e alla differenza.

applicazioni delle proprietà della divisione:
il calcolo della divisione tra numeri decimali

Proprietà distributiva

La proprietà distributiva coinvolge più operazioni.
Ad esempio, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione afferma che:

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c \quad \textit{per ogni numero } a, b, c$$

Comunque decomposto un rettangolo che ha un lato di lunghezza *c* in due rettangoli aventi un lato di lunghezza *c* parallelo al lato del rettangolo di partenza, l'area del rettangolo grande è la somma delle aree dei rettangoli piccoli: questo risultato è alla base della possibilità di calcolare l'area per scomposizione:

Questa osservazione sta alla base della possibilità di calcolare le aree per scomposizione.
Valgono anche

- la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione
$$(a-b) \times c = a \times c - b \times c \textit{ per ogni numero } a, b, c$$
- la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione
$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c \textit{ per ogni numero } a, b, c$$
- la proprietà distributiva della divisione rispetto alla sottrazione
$$(a-b) \times c = a \times c - b \times c \textit{ per ogni numero } a, b, c$$

applicazioni delle proprietà distributiva

a) E' possibile calcolare tutti prodotti a partire dai prodotti dei numeri ad una cifra (cioè basta limitarsi a studiare le tabelline da 1 a 9); in particolare, vale l'algoritmo della moltiplicazione: l'usuale algoritmo di prodotto in colonna sfrutta un percorso del tipo seguito in questo esempio:

$47 \times 24 \quad = 47 \times (20 + 4) = 47 \times 20 + 47 \times 4$
$\qquad\qquad = 47 \times 20 + 188 = 940+188 = 1128$

```
   4 7 ×
   2 4 =
------------
  188
  94
---------------
   1128
```

ove tutto viene semplificato dall'uso della scrittura posizionale.

b) semplificazione nei calcoli e, in particolare, nei calcoli mentali:
Ad esempio, nel calcolare 18×3, si può procedere calcolando
$(10 \times 3) + (8\times3) = 30 + 24 = 54$
c) la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla differenza è alla base dell'algoritmo della sottrazione.