Proposizioni e tavole di verità

Una ***proposizione*** è un enunciato (dichiarazione, frase) che può essere vero o può essere falso, ma non può essere contemporaneamente sia vero che falso. Essere vera o falsa sarà detto il ***valore di verità*** della proposizione.
Un ***paradosso*** è un enunciato che non è né vero né falso. Ad esempio, è un paradosso la frase: "questa frase è falsa".

Una proposizione deve essere decidibile nel contesto in cui stiamo lavorando (cioè deve essere è vera o, in alternativa, falsa). Non sono proposizioni le frasi interrogative, esclamative, o che esprimono opinioni.

Sono proposizioni (ad esempio):
- *Parigi è una città nel Lazio.*
- *Oggi è domenica*
- *I trapezi hanno una coppia di lati paralleli*

Non sono proposizioni:
- *Che ora è?*
- *3x = 5*
- *Il film è bello*

In alcuni casi, il valore di verità dipende dal contesto (come in *Tutti i bambini in questa palestra giocano a pallavolo, Oggi è domenica*): stabilire quale sia il grado di verità è possibile, ma occorrono informazioni aggiuntive. Per questo motivo, anche se la proposizione è sicuramente o vera o falsa (e le due opzioni sono alternative) occorre talora considerare possibili entrmbe le opzioni, in attesa che altre informazioni permettano di stabilire il valore di verità: la proposizione *Oggi è domenica* è da considerarsi vera se oggi è effettivamente domenica, falsa in un qualsiasi altro giorno della settimana.
Per indicare una proposizione, utilizzeremo spesso una lettera minuscole, come p, q. L'utilizzo di una lettera per simboleggiare una proposizione è utile in varie situazioni. Un primo esempio è legato alla possibilità di rappresentare in una breve tabella i possibili valori di verità, elencando tutti i casi possibili: tali tabelle sono dette ***tavole (o tabelle) di verità***.

Esempio. (V indica Vero, F indica Falso) Se abbiamo solo la proposizione p, la tavola della verità è:

p
V
F

Se abbiamo due proposizioni p e q, la tavola diventa:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	V

Inoltre, è possibile che dichiarazioni diverse (ma che hanno lo stesso significato) esprimano la stessa proposizione. Per esempio, possiamo formulare lo stesso enunciato in lingue differenti: *Oggi è domenica*, *Today is Sunday, Aujourd'hui c'est dimanche* sono enunciati differenti, ma esprimono la stessa proposizione perchè hanno lo stesso significato (lo verifichiamo controllando che hanno la stessa tavola della verità) . Ciò può accadere anche a due diverse dichiarazioni espresse nella stessa lingua, come per esempio *Questo nastro è lungo 3 cm* o *Questo nastro è lungo 0,3 m*. Quando due enunciati hanno lo stesso significato (cioè hanno la stessa tavola della verità) sono detti equivalenti e diremo che essi esprimono la stessa proposizione.
Una ***tautologia*** è una proposizione che è vera in tutti i casi. Ad esempio *le rette l e m sono parallele oppure le rette l e m non sono parallele.*
Una ***contraddizione*** è un enunciato che è falso in tutti i casi. Ad esempio, *questo triangolo è isoscele e non è isoscele*.

Operatori sulle proposizioni

A partire da una o più proposizioni, è possibile costruire nuove proposizioni. Forniamo un elenco riassuntivo delle 'operazioni' che verranno studiate in dettaglio nel seguito.

1. La negazione di una proposizione vera produce una proposizione falsa, e viceversa. Ad esempio, la negazione di *il rettangolo è un parallelogramma* è *il rettangolo non è un parallelogramma*. La negazione di p si denota con il simbolo $\sim p$ o $\neg p$.

2. Due proposizioni p e q sono collegate con un ***connettivo logico*** tra i seguenti:

operazione su p **e** q	**simbolo**	**lettura del simbolo**	**esempio**
congiunzione logica	$p \wedge q$	p e q	*Guardo un film e mangio il pop-corn* *Sono richiesti l'invito e l'abito da sera*
disgiunzione logica	$p \vee q$	p o q	$x< y$ o $x>y$ *Leggo un libro o vado al cinema* *L'ingresso è riservato ai soci o a chi ha pagato il biglietto.*
implicazione logica	$\Rightarrow$	p implica q se p allora q	*Se ho la febbre, sono malato* *Se piove, andiamo al cinema*
coimplicazione logica	$\Leftrightarrow$	p se e solo se q	*Un triangolo è rettangolo se e solo se ha un angolo retto* *Un triangolo ha tre lati uguali se e solo se ha tre angoli uguali*

In italiano non si distingue tra disgiunzione inclusiva e negazione esclusiva.

Viceversa, riconoscendo i connettivi, è possibile riconoscere se una proposizione è stata creata connettendo proposizioni più semplici: diremo che stiamo 'riducendo' o 'scomponendo' la proposizione in proposizioni più semplici. Una ***proposizione elementare*** è una proposizione che non può essere ridotta ulteriormente, senza perdere significato. Ad esempio, *Carlo è a Roma* è una proposizione elementare, mentre non lo è *Giovanni saliva le scale, mentre gli arrivò una telefonata.*

Il valore di verità delle proposizioni composte (o della negazione di una proposizione) può essere dedotto in funzione del valore di verità delle proposizioni di cui è composta.

Negazione

La negazione di una proposizione p è la proposizione che è vera quando p è falsa e falsa quando p è vera. La negazione di p si denota con il simbolo $\sim p$ o $\neg\, p$ (che si legge *non* p).

Dunque, negando una proposizione vera otteniamo una proposizione falsa, e viceversa. Inoltre, la negazione è definita dalla tavola della verità

p	$\sim p$
V	F
F	V

Esempi: *p : mangio la mela*
~p:non mangio la mela / non è vero che mangio la mela
q : mangio la mela
~q:non mangio la mela / non è vero che mangio la mela

Si ricava che negando due volte si ritorna alla proposizione di partenza: $\sim(\sim p)$ è equivalente a $\sim p$:

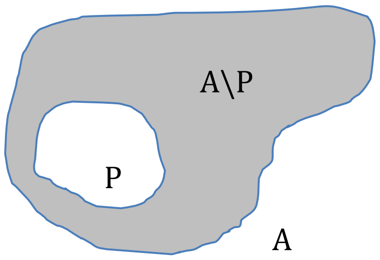
p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

Osserva: la negazione richiede una particolare attenzione quando nella frase compaiono dei quantificatori; infatti, *la negazione di un esistenziale è un universale, mentre la negazione di un universale è un esistenziale*.

Esempi:

p : tutti i bambini parlano	*~p:non tutti i bambini parlano/ c'è almeno un bambino che non parla*
q : non vado mai in piscina	*~q:qualche volta vado in piscina*
r: un alunno partecipa alla gara	*~r:nessun alunno partecipa alla gara*
t:nessun genitore mi ha parlato	*~t:mi ha parlato almeno un genitore/qualche genitore mi ha parlato*

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la negazione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono rosse*. Possiamo rappresentare la proposizione disegnando l'insieme A di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme P delle rose rosse. La negazione $\sim p$ è allora rappresentato dall'insieme complementare di P in A, denotato da A\P e formato da tutti gli elementi di A che non sono in P: $A\setminus P=\{a \in A \mid a \notin P\}$.



Congiunzione

La ***congiunzione*** di due proposizioni p e q è la proposizione che è vera quando entrambe p e q sono vere, mentre è falsa in tutti gli altri casi. La congiunzione di due proposizioni p e q viene denotata con $p \wedge q$, che si legge p e q.

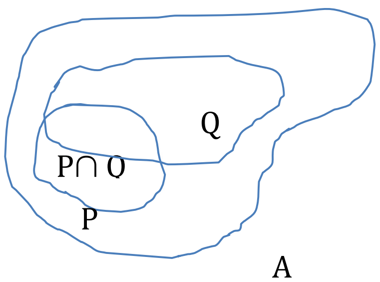
La tavola della verità di $p \wedge q$, in base al valore di verità delle proposizioni p e q, è la seguente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esercizio: - Determina la tavola della verità di $q \wedge p$.

- Determina la tavola della verità di $(p \wedge q) \wedge r$ (per tre proposizioni p, q, r).
- Determina la tavola della verità di $\sim(p \wedge q)$.
- Determina la tavola della verità di $(\sim p) \wedge q$.
- Determina la tavola della verità di $p \wedge (\sim q)$.

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la congiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono rosse*, la proposizione *q: le rose sono appassite* e la congiunzione $p \wedge q$*: le rose sono rosse e appassite*. Possiamo rappresentare la proposizione disegnando l'insieme A di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme P delle rose rosse e il sottoinsieme Q delle rose appassite. La congiunzione $p \wedge q$ è allora rappresentata dall'insieme intersezione di P e Q, denotato da P∩Q e formato da tutti gli elementi di A che sono sia in P che in Q: $P\cap Q = \{a \in A \mid a \in P \text{ e } a \in Q\}$.



Disgiunzione

La ***disgiunzione*** di due proposizioni p e q è la proposizione che è falsa quando entrambe p e q sono false, mentre è vera in tutti gli altri casi.

La tavola della verità di $p \lor q$, in base al valore di verità delle proposizioni p e q, è la seguente:

p	q	$p \lor q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

E' possibile distinguere due casi differenti di disgiunzione di due proposizioni p e q:
a) la *disgiunzione inclusiva* quando p e q possono essere vere contemporaneamente (talvolta indicata con e/o, in latino vel, in logica booleana OR)

E' richiesto il biglietto o l'abbonamento

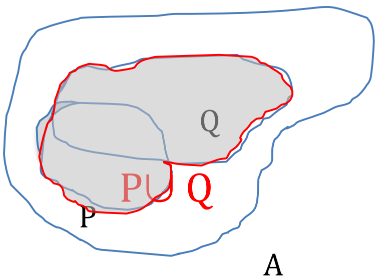
b) la *disgiunzione esclusiva* quando p e q non possono essere vere contemporaneamente, e quindi si escludono a vicenda (in logica booleana XOR, in latino aut, talora denotata con $p \dot{\lor} q$)

2>3 *oppure* 2<3

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la disgiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono rosse*, la proposizione *q: le rose sono appassite* e la disgiunzione $p \lor q$: *le rose sono rosse o appassite*. Possiamo rappresentare la proposizione disegnando l'insieme A di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme P delle rose rosse e il sottoinsieme Q delle rose appassite. La disgiunzione $p \lor q$ è allora rappresentata dall'insieme unione di P e Q, denotato da P∪Q e formato da tutti gli elementi di A che sono sia in P che in Q:

$P \cup Q = \{a \in A \mid a \in P \text{ oppure } a \in Q\}$.

La disgiunzione esclusiva corrisponde al caso in cui P∩Q risulta vuoto.



Esercizi: - Determina la tavola della verità di $q \lor p$.
- Determina la tavola della verità di $(p \lor q) \lor r$ (per tre proposizioni p, q, r).
- Determina la tavola della verità di $\sim(p \lor q)$.
- Determina la tavola della verità di $(\sim p) \lor q$.
- Determina la tavola della verità di $p \lor (\sim q)$.

Equivalenza