Proposizioni e tavole di verità

Una ***proposizione*** è un enunciato che può essere vero o può essere falso, ma non può essere contemporaneamente sia vero che falso.

Una proposizione deve essere decidibile nel contesto in cui stiamo lavorando (cioè deve essere possibile decidere se è vera o falsa).

Sono proposizioni (ad esempio):

- *Parigi è una città nel Lazio.*
- *Oggi è domenica*
- *I trapezi hanno una coppia di lati paralleli*

Non sono proposizioni:

- *Che ora è?*
- *3x = 5*
- *Il film è bello*

Non sono proposizioni le frasi interrogative, esclamative, o che esprimono opinioni.

La negazione di una proposizione vera produce è una proposizione falsa, e viceversa. Ad esempio, la negazione di *il rettangolo è un parallelogramma* è *il rettangolo non è un parallelogramma*. Riprenderemo in seguito il problema di come si formula la negazione di una proposizione.

Un ***paradosso*** è un enunciato che non è ne' vero ne' falso. Ad esempio, è un paradosso la frase: "questa frase è falsa".
Una ***tautologia*** è una proposizione che è vera in tutti i casi. Ad esempio *le rette l e m sono parallele oppure le rette l e m non sono parallele.*
Una ***contraddizione*** è un enunciato che è falso in tutti i casi. Ad esempio, *questo triangolo è isoscele e non è isoscele*.

Una ***proposizione elementare*** è una proposizione che non può essere ridotta ulteriormente, senza perdere significato. Ad esempio, *Carlo è a Roma* è una proposizione elementare, mentre non lo è *Giovanni saliva le scale, mentre gli arrivò una telefonata*.
Per mettere in evidenza le regole che stiamo utilizzando, indicheremo le proposizioni semplici con lettere, come *p* o *q*. La negazione di p si denota con il simbolo *~p*. Spesso, le proposizioni semplici saranno collegate da ***connettivi logici***, componendo proposizioni più complesse.

Ecco alcuni ***connettivi logici*** e i simboli con i quali vengono rappresentati:

Implicazione:

$\Rightarrow$	implica che se...... allora....	la *implicazione logica*	*Se piove, allora andiamo al cinema*
$\nRightarrow$	non implica che		
$\Leftrightarrow$	se e solo se	la *coimplicazione logica*	*Un triangolo è isoscele se e solo se ha due lati uguali*

Congiunzione:

$p \wedge q$	p e q	la *congiunzione logica*	*Mangio la pasta e bevo l'acqua*

Disgiunzione:

$p \vee q$	p o q	la *disgiunzione inclusiva* (talvolta indicata con e/o, in latino vel,	*E' richiesto il biglietto o l'abbonamento*

		in logica booleana OR)	
$p \dot{\vee} q$	p o q	la *disgiunzione esclusiva* (in logica booleana XOR, in latino aut	$2>3$ oppure $2<3$ (uno solo di questi casi è vero)

In italiano non si distingue tra disgiunzione inclusiva e negazione esclusiva.

Tavole di verità

Le tavole di verità vengono utilizzate per descrivere i possibili valori di verità di una proposizione. (V indica Vero, F indica Falso).

Nelle tabelle successive, si discute la verità di una proposizione composta (o della negazione di una proposizione) a seconda del valore di verità delle proposizioni elementari di cui è composta.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	$\sim p$
V	F
F	V

Esercizio: costruire la tavola di verità di $p \vee \sim q$.

Due proposizioni sono ***equivalenti*** se e solo se hanno gli stessi valori di verità (in tutti i casi).

Esempio: Mostra che $\sim (p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$ sono equivalenti.

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concludiamo che i due enunciati sono equivalenti, perché le tavole di verità coincidono.

Ad esempio, possiamo pensare

p: questo angolo è acuto

q: questo angolo è acuto

$\sim (p \vee q)$: *non è vero che questo angoloè acuto o ottuso.*

$\sim p \wedge \sim q$: *questo angolo non è acuto e non è ottuso.*