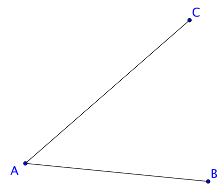
**Proposizione I.9**

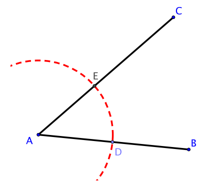
*È possibile dividere in due parti uguali un qualsiasi angolo (rettilineo) assegnato.*
*In modo equivalente, diremo che è possibile bisecare l'angolo.*

**Dimostrazione**

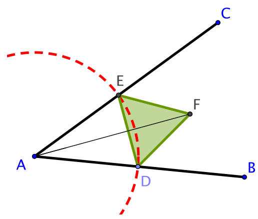
Sia $\widehat{BAC}$ un angolo rettilineo assegnato.




Si fissino un punto D sul segmento AB e un punto E su AC in modo tale che AD=AE [I.3]

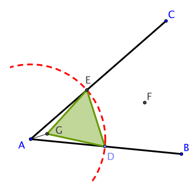



Si congiunga D con E [post. 1] e si costruisca un triangolo equilatero DEF di lato DE [I.1] Si congiunga A con F [post . 1]

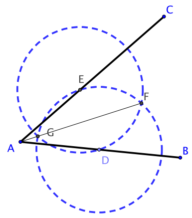


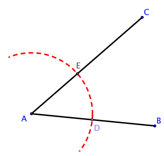

Dimostriamo ora che AF divide a metà l'angolo $\widehat{BAE}$, cioè $\widehat{BAF}$ = $\widehat{FAE}$.
Consideriamo il triangolo $AED^{\Delta}$: in esso, AE=AD per costruzione. Per la prop. I.5, gli angoli alla base $\widehat{AED}$ e $\widehat{ADE}$ sono uguali. Analogamente, poiché il triangolo $DFE^{\Delta}$ è equilatero (e quindi EF=FD), l'angolo $\widehat{EFD}$ è uguale all'angolo $\widehat{FDE}$.
Supponiamo che il triangolo equilatero sia disposto come in figura. Poiché, per le nozioni comuni, sommando cose uguali si ottengono cose uguali tra loro, l'angolo $\widehat{AEF} = \widehat{AED} + \widehat{DEF}$ risulta uguale all'angolo $\widehat{ADF} = \widehat{ADE} + \widehat{EDF}$.
Consideriamo ora i triangoli $AFE^{\Delta}$ e $ADF^{\Delta}$. In essi, AE=AD per costruzione, AF è in comune. Inoltre l'angolo $\widehat{AEF}$ compreso tra AE e EF coincide con l'angolo $\widehat{ADF}$ compreso tra AD e DF (come appena dimostrato). Per l'assioma LAL, concludiamo che i triangoli $AFE^{\Delta}$ e $ADF^{\Delta}$ sono congruenti. In particolare, ricaviamo che l'angolo $\widehat{EAF}$ è uguale all'angolo $\widehat{FAD}$: è quanto volevamo dimostrare.
[osserviamo, inoltre, che l'angolo $\widehat{EFA}$ è uguale all'angolo $\widehat{AFD}$: dunque, il segmento AF risulta bisettrice anche dell'angolo $\widehat{EFD}$ del triangolo equilatero.] Q.E.D.

Esercizio 1. Completa la dimostrazione nel caso il triangolo equilatero sia disposto come nella figura.



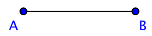

Esercizio 2. Dimostra che i punti A, G, F sono allineati, cioè i segmenti AG e AF sono uno contenuto nell'altro.



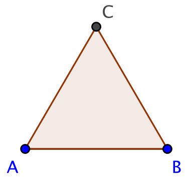




Esercizio 3. Dividi l'angolo in figura in 4 e in 8 parti uguali.

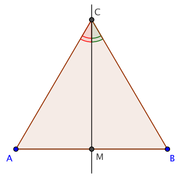
**Proposizione I.10**
*E' possibile dividere in due parti uguali un qualsiasi segmento assegnato*
**Dimostrazione**
Sia assegnato un segmento AB.




Vogliamo costruire il punto medio M (cioè il punto M appartenente al segmento e tale che AM=MB)




Costruiamo un triangolo equilatero ABC di lato AB (prop. I.1):



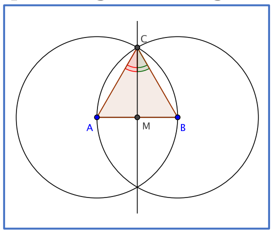

e bisechiamo l'angolo in C (prop. I.9) :

Chiamiamo M il punto di intersezione tra il segmento AB (o un suo prolungamento) e la retta che biseca l'angolo C.
Mostriamo che M divide il segmento AB in due parti uguali: consideriamo i triangoli AMC e MBC; essi hanno il lato MC in comune, gli angoli MCB e MCA congruenti per costruzione della bisettrice, e i lati AC=BC per definizione di triangolo equilatero. Ad essi possiamo quindi applicare il criterio di congruenza LAL, mostrando che AMC e MBC sono triangoli congruenti.
Da tale congruenza segue che:

AM=MB ,
l'angolo in A è uguale all'angolo in B (ma lo sapevamo già per la prop. I.5)
l'angolo AMC è uguale all'angolo CMB.

In particolare, AM=MB e abbiamo diviso AB in due parti uguali. Q.E.D.

Esercizio 1. Mostra che, per dividere a metà il segmento AB, è sufficiente tracciare due cerchi di raggio AB (uno con centro A e l'altro con centro B) e tracciare la retta che congiunge i punti di intersezione tra questi due cerchi: tale retta divide in due parti uguali il segmento AB.




Esercizio 2. Dividi il segmento AB in 4 e in 8 parti uguali.


## Osservazione
Come applicazione del teorema di Talete, vedremo che non è difficile suddividere un segmento in un numero arbitrario di parti uguali (nel senso di sottomultipli naturali). Non è invece possibile dividere in tre parti uguali un angolo se si utilizzano unicamente riga e compasso (e la prima dimostrazione nota di tale fatto risale al 1837).