Problema. Dato una circonferenza ed un punto P ad essa esterno: traccia la tangente alla circonferenza passante nel punto P.

Ma che cos'è una tangente? La si considera un segmento? Una retta?

Occorre una premessa. Se per distanza tra due punti s'intende facilmente il segmento che passa per i due punti non è altrettanto evidente che *cosa s'intende per distanza di un punto da un segmento o da una retta*.

Qual è la distanza del punto P dal segmento AB? Visualizzare alcune possibili posizioni relative tra il punto P e il segmento AB.

Figura 1

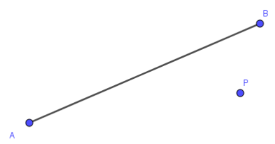


Figura 2

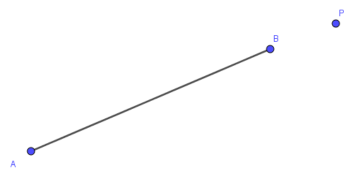


Figura3

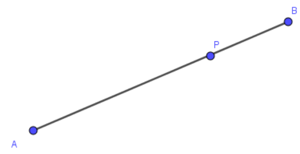


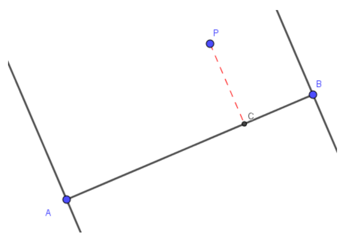
Figura 4

In ogni situazione, da P si "staccano" diversi segmenti che intersecano i punti del segmento (tranne in figura 4).
Quali tra questi è la distanza?

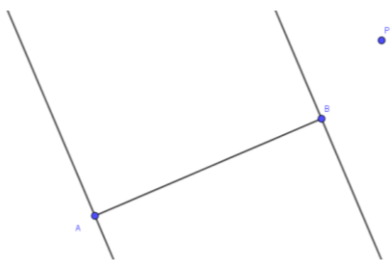
Un prerequisito fondamentale: in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è sempre maggiore di un qualunque cateto (si deduce dal fatto che è apposto all'angolo maggiore).

E' evidente un fatto. Nelle prime 3 situazioni vi sono due segmenti particolari: il **minimo** ed il **massimo.** PA e PB nella figura 1, PC (C piede della perpendicolare, ma perché quello perpendicolare è il segmento minimo?) e PA nella seconda, PB e PA nella figura 3. Pertanto non vi è un modo univoco per definire la distanza. E nella figura 4? Quale segmento rappresenta la distanza dal segmento AB? Viene da pensare che sia nulla?

In generale, se P è interno alla striscia determinata dalle due perpendicolari ad AB passanti per P, il segmento minimo di P da AB è data da PC mentre il massimo varia.

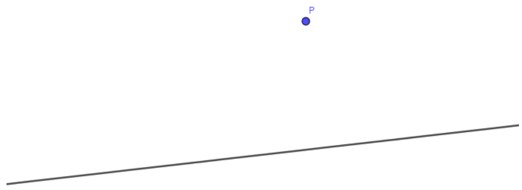


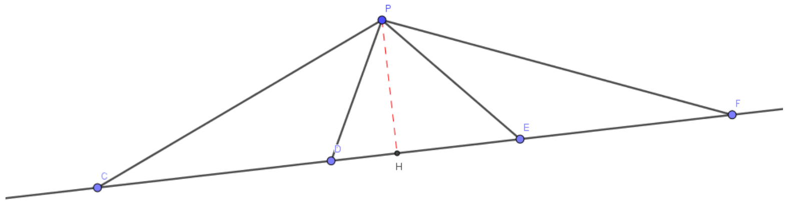
Se invece P è fuori dalla striscia la distanza minima è rappresentata dal segmento che unisce P con l'estremo più vicino, mentre la massima quello con l'estremo più lontano.



Comunque per definire la distanza di un punto da un semento abbiamo bisogno di "più regole". Tuttavia, per i punti interni alla striscia, il segmento minimo è ben definito essendo quello perpendicolare, quello massimo dipende quale posizione occupa P rispetto all'asse. In definitiva c'è una leggera propensione a definire la distanza come il segmento minimo essendo soggetto a meno condizioni. Se P è esterno alla striscia la definizione del minimo e del massimo è ugualmente univoca (rispettivamente l'estremo più vicino e più lontano).

Le cose si semplificano se invece di considerare la distanza di un punto da un segmento si considerasse la distanza con una retta. Perché? Quale segmento potrebbe rappresentare la distanza di un punto da una retta? Ora non ci sono più gli estremi del segmento.





A questo punto è evidente che tra gli infiniti segmenti che si possono tracciare aventi come estremi il punto P e un punto della retta ve ne è **solo uno** privilegiato, "riconoscibile" rispetto a tutti gli altri: il segmento minimo rappresentato da quello perpendicolare.

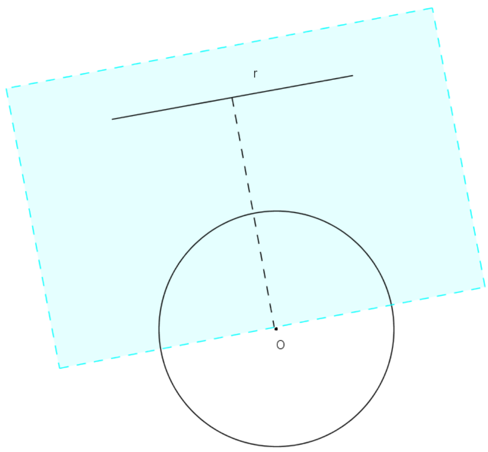
Pertanto PH rappresenta la distanza del punto P dalla retta data.

Quindi questo vuole dire che se la distanza di un punto da un segmento prevede l'analisi di diversi casi, la distanza di un punto da una retta prevede un unico caso. Questa considerazione potrebbe motivare, nel caso si debba tracciare la distanza di un segmento da un punto esterno, a prolungare il segmento considerandolo parte di una retta. In questo modo la distanza di un punto da esso sarebbe quella del punto dalla retta a cui appartiene.

Stabilito questo, si comincia con il far pensare a quali e quante possono essere le possibili posizioni reciproche tra un segmento o una retta ed una circonferenza. E' conveniente relazionare questo concetto con il centro della circonferenza e prendere in considerazione le distanza e di esso con i segmenti e le rette date. Ma siccome si è detto che la distanza tra un segmento ed un punto è univocamente determinata solo nel caso in cui si considerano delle rette da ora in avanti non verranno più considerati i segmenti.

In generale i ragazzi evidenziano subito i casi più evidenti: una circonferenza *C* ed una retta *a* potrebbero naturalmente non incontrarsi, oppure avere due punti di incontro o come si dice, due punti **d'intersezione**.

Con una striscia lucida sulla quale è rappresentato ancora una volta un segmento (ricordare sempre che si tratta di una rappresentazione di una retta) ed una sua perpendicolare (che tale retta sia l'asse del segmento non è riduttivo); facendo appoggiare questa sul foglio in modo tale che la perpendicolare passi per il centro della circonferenza, si farà osservare ai ragazzi che questa simulerà la distanza della retta dal centro della circonferenza. Si pone la seguente:



Domanda 1. *Confronta la distanza* **d** *della retta r con il centro O, con il raggio* **R** *della circonferenza C. Chi è maggiore tra* **d** ed **R**?

Domanda 2. *Cosa assicura ad una retta di non intersecare in alcun punto la circonferenza?*

Si dovrebbe concludere che affinché non ci siano intersezioni occorre che la distanza **d** retta - centro sia tale che

$$\mathbf{R} < \mathbf{d}$$

Definizione. Se una retta *r* è tale da avere una distanza **d** dal centro O di una circonferenza *C* di raggio **R**, tale che **R** < **d**, la retta si dirà **esterna** alla circonferenza.

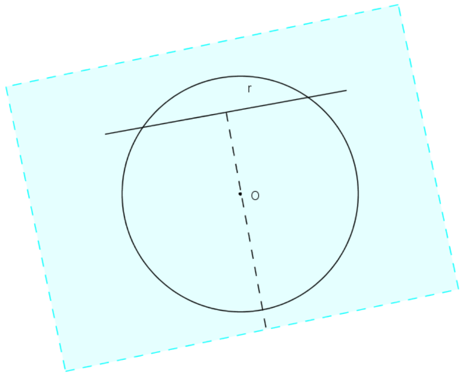
Successivamente si può porre:

Domanda 3. *Come debbono essere tra di loro* **R** *e* **d** *affinché sicuramente una retta intersechi la circonferenza?*

Ci si aspetta che i ragazzi muovendo il lucido arrivino ad una posizione del genere, rappresentata dall'immagine qui in basso:

è evidente che l'intersezione avviene in due punti è ciò avviene quando

$$\mathbf{R} > \mathbf{d}.$$



Far annotare la seguente:

Definizione. Se una retta *r* è tale da avere una distanza **d** dal centro O di una circonferenza *C* di raggio **R**, tale che **R** > **d**, la retta si dirà **secante** alla circonferenza.

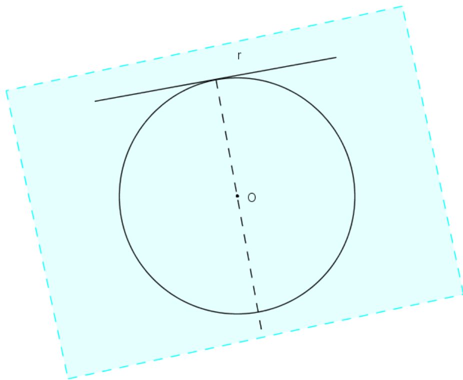
Non è impossibile che accada che qualche osservatore più attento si accorga a partire dal caso in cui *r* abbia 2 intersezioni con *C*, che spostandola parallelamente a se stessa, aumentando **d,** veda le due intersezioni "avvicinarsi" sempre più; ad un certo punto, queste due intersezioni sembreranno coincidere e dopo un ulteriore spostamento, non esserci più.

Questo è decisamente il caso più difficile da analizzare: si può solo "intuire" che "allontanando" *r* da O i punti d'intersezione si "avvicinino" ed è presumibile che ci sarà una situazione in cui coincideranno. Dopo un ulteriore spostamento *r* e *C* non avranno più punti in comune. Porre la:

Domanda 4. *Come saranno* **d** *ed* **R** *tra di loro quando i due punti d'intersezione coincideranno*?

Si vuole naturalmente giungere alla conclusione che nella situazione

$$\mathbf{R} = \mathbf{d}$$



i due punti d'intersezione retta circonferenza coincidono, di fatto sono **l'unico** punto in comune tra la circonferenza e la retta.

Si farà prendere nota della seguente:

Definizione. Se una retta *r* è tale da avere una distanza dal centro O di una circonferenza *C* pari al suo raggio **R**, la retta si dirà **tangente** alla circonferenza. In questo caso segmento e circonferenza avranno sicuramente un punto in comune, detto **punto di tangenza**.

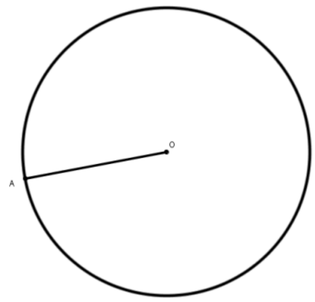
Dalla costruzione non dovrebbe essere particolarmente difficile rispondere alla:

Domanda 5. *Qual è l'angolo tra retta r e raggio* **R** *quando è tangente ad una circonferenza ?*

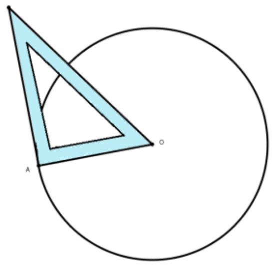
Questi risultato è particolarmente importante: si scopre che una retta ed una circonferenza tangenti formano un angolo retto! Fare annotare questo risultato importantissimo: sarà determinante per comprendere ulteriori proprietà legate alle circonferenze inscritte in un poligono (o analogamente di poligono circoscritto ad una circonferenza):

Proprietà: *Una retta tangente in un punto* Q *ad una circonferenza, forma sempre un angolo retto con il raggio della stessa passante per* Q.

Questa proprietà suggerisce un **metodo operativo** per **disegnare**, **data una circonferenza**, **la tangente alla circonferenza in un suo qualsiasi punto**. Infatti supponiamo di avere una circonferenza ed un suo punto A; si deve tracciare la tangente a questa circonferenza nel punto A.

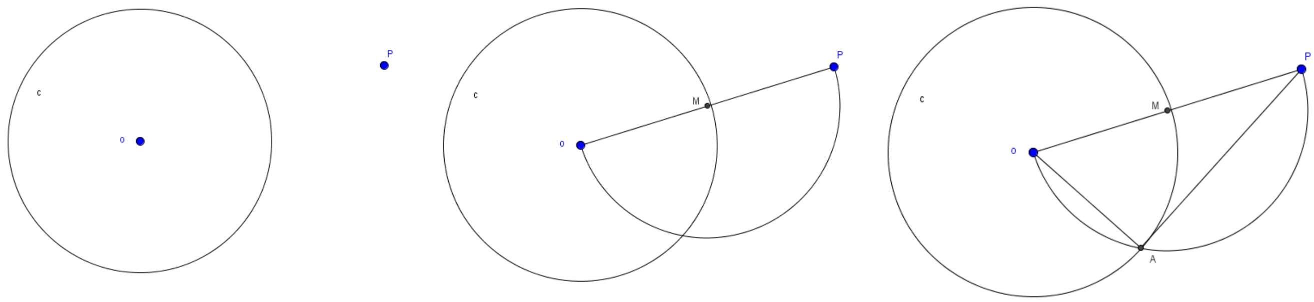


Si prenda una squadra e si faccia coincidere il suo vertice dell'angolo retto con il punto A ed un cateto della squadra con il raggio OA. L'altro cateto della squadra permette di tracciare una tratto di semiretta con origine in A, che, per quanto visto in precedenza, risulta essere la tangente cercata nel punto A.



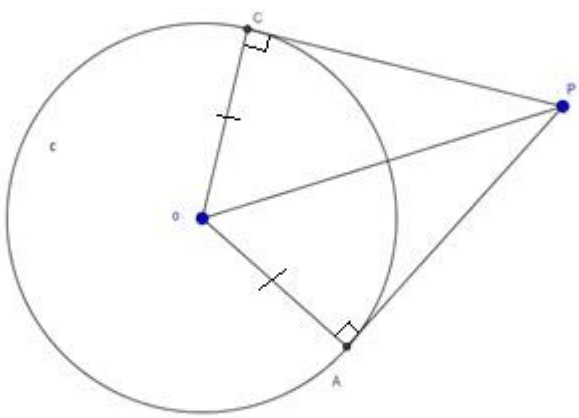
A questo punto si può tornare al problema posto all'inizio. Supponiamo di trovarci nella situazione illustrata nella prima delle tre figure qui in basso: occorre tracciare da P, la tangente alla circonferenza.

1. Si congiunge P con O
2. si traccia la semicirconferenza di diametro PO
3. la circonferenza iniziale e la semicirconferenza appena tracciata s'intersecano in A.
4. L'angolo PAO è retto e PA è la tangente cercata.



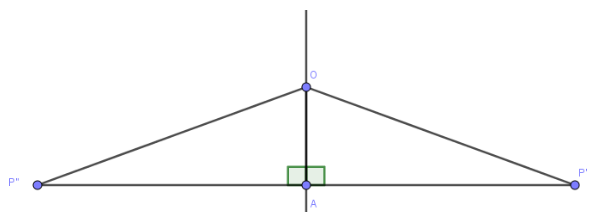
Sempre dallo stesso punto P è naturalmente possibile **tracciare un'altra tangente alla circonferenza**. Non è difficile congetturare che **sono uguali. Perché**?

Tracciate le due tangenti, si evidenziano due triangoli rettangoli: POC e POA.



Se si ha la possibilità di avere due triangoli rettangoli concreti questi potrebbero essere avvicinati dalla parte dei lati uguali OA e OC:

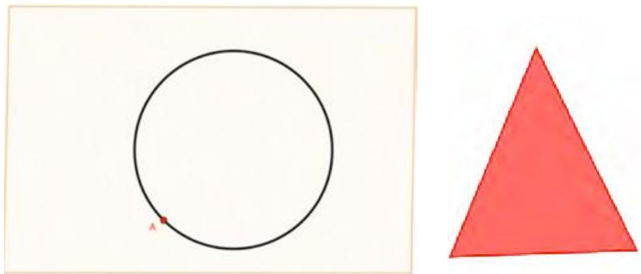
si otterrebbe complessivamente un triangolo isoscele con OA l'altezza e i due lati uguali OP' e OP'' che nella precedente figura rappresentavano il lato coincidente PO. Dal fatto che è isoscele i due triangoli AP'O e AP''O sono uguali. Da cui l'uguaglianza delle due tangenti alla circonferenza.



Data una circonferenza da un punto esterno si possono tracciare due tangenti di uguale lunghezza.

Il laboratorio prosegue con la parte conclusiva che consiste nel portare gli studenti a capire il legame tra l'angolo al centro e angolo alla circonferenza.

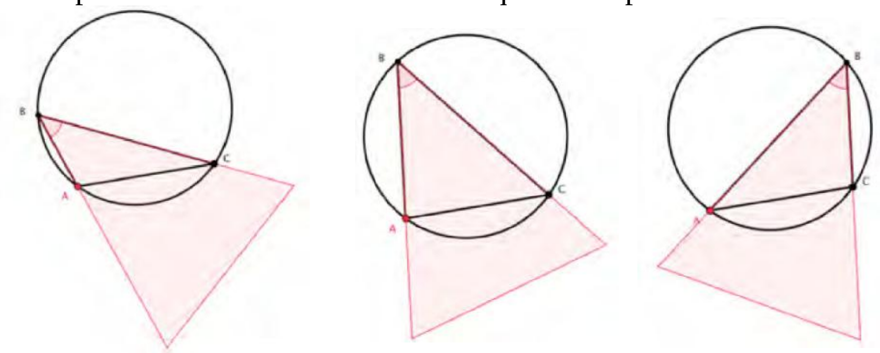
Attività 1
Materiale fornito agli studenti:
Una circonferenza disegnata su un cartoncino formato A4 e un triangolo isoscele in cartoncino rosso. Sulla circonferenza è stato fissato un punto A.



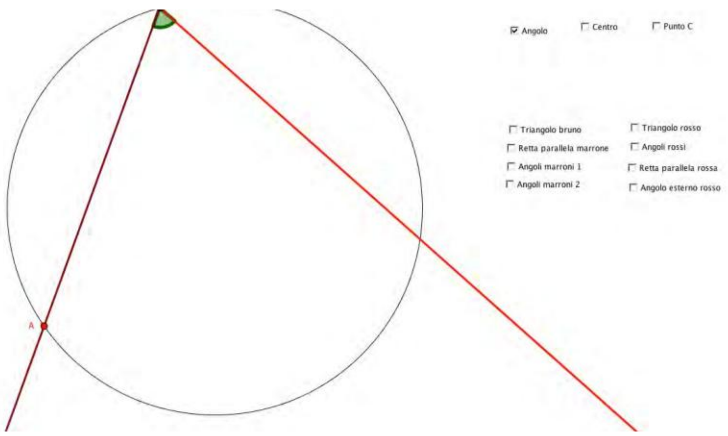
Lo studente sovrappone il triangolo al cerchio verificando le seguenti due istruzioni

a) un lato obliquo deve passare per A
b) il vertice B deve toccare la circonferenza

Fatto questo con la matita disegna il triangolo ABC iscritto nel cerchio.
Fare questa operazione più volte e cercare di descrivere quello di speciale che accade.



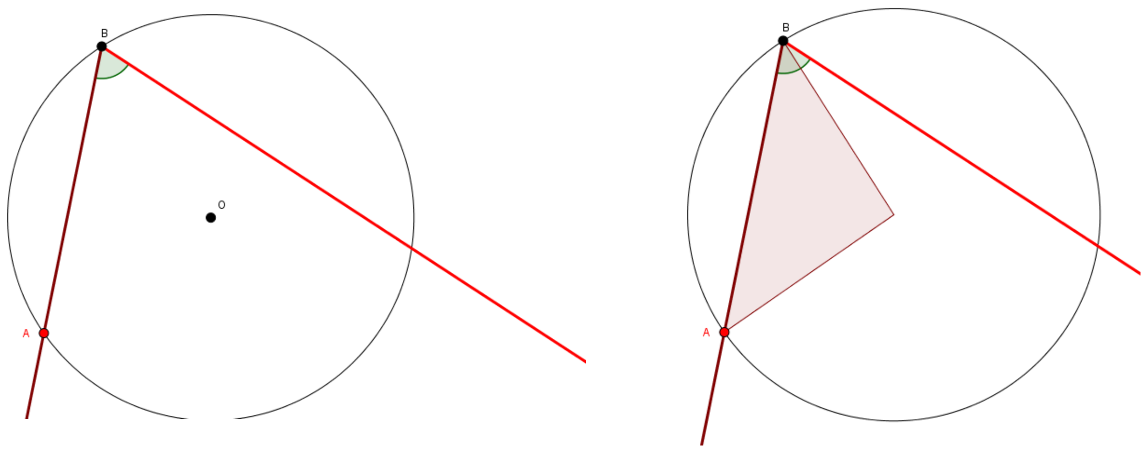
Il punto C è rimasto fisso!
Perché C è fisso?
E' importante usare delle immagini in movimento. Prima di tutto costruiamo un oggetto virtuale con Geogebra che simula quello che hanno fatto gli studenti manualmente e ci permette di intervenire sulla figura aggiungendo via via nuovi oggetti geometrici.



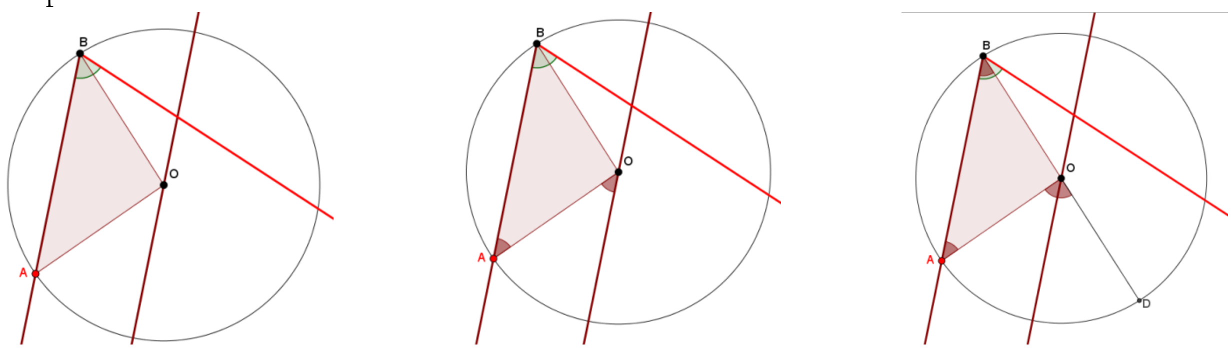
Abbiamo inserito alcuni pulsanti che permettono di aggiungere e togliere alcuni elementi della figura. Questo ci permette di sviluppare un percorso didattico dinamico che ci aspettiamo possa essere più coinvolgente e partecipato.
Quello che possiamo muovere è il punto P vincolato alla circonferenza. Durante questo movimento è importante chiedersi: cosa non cambia durate il movimento?
Aspettare le risposte degli studenti. E' importante consolidare l'idea che l'angolo in B non cambia qualunque sia la posizione di B.
Chiamiamo α l'angolo in B (verde nella figura). Vediamo i vari passi del percorso che proponiamo.

Primo passo

In una circonferenza la cosa più importante è il suo centro O. Evidenziamo il centro e costruiamo il triangolo marrone.



Questo triangolo è isoscele qualunque sia la posizione di B. Muovere inizialmente il punto B per verificarlo e poi accertarsene dal fatto che i suoi due lati sono due raggi. Dunque gli angoli alla base sono uguali. Vediamo come possiamo portare questi angoli uno accanto all'altro in O. Per fare questo tracciamo la retta parallela al lato AB:



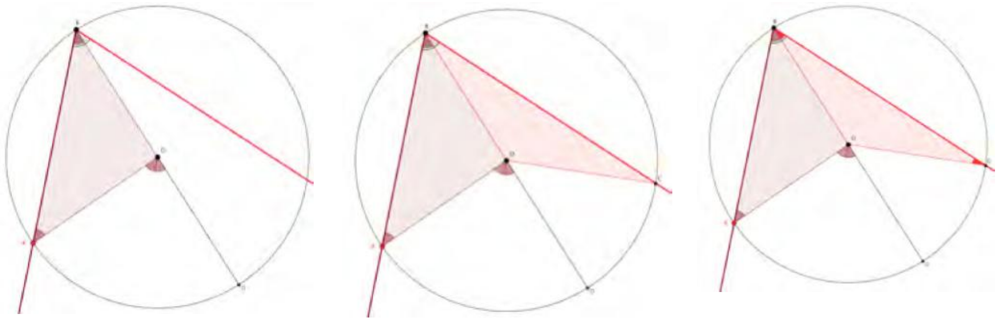
Il doppio dell'angolo $\beta = \mathrm{ABO}$ che è una parte dell'angolo verde $\beta < \alpha$ lo abbiamo portato al centro!

$$\mathrm{AOD} = \mathrm{OAB} + \mathrm{ABO} = 2\beta$$

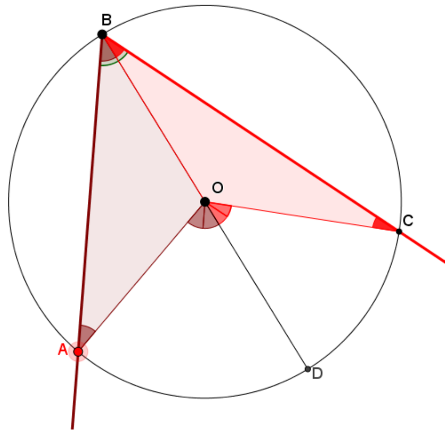
Questo è il punto cruciale della dimostrazione: prima di proseguire bisogna che sia molto chiaro.

Secondo passo

Fissata una particolare posizione di B, consideriamo ora il punto C dove la retta rossa incontra la circonferenza (a priori il punto C cambia posizione quando muoviamo B e vogliamo dimostrare che questo invece non accade). Consideriamo, come abbiamo fatto prima, il triangolo rosso.



Chiamiamo γ l'angolo rosso: $\gamma = \mathrm{OBC}$



COD=OCB+CBO= 2γ

In questo modo il doppio dell'altra parte dell'angolo verde, cioè il doppio dell'angolo rosso, lo abbiamo portato vicino all'angolo marrone.

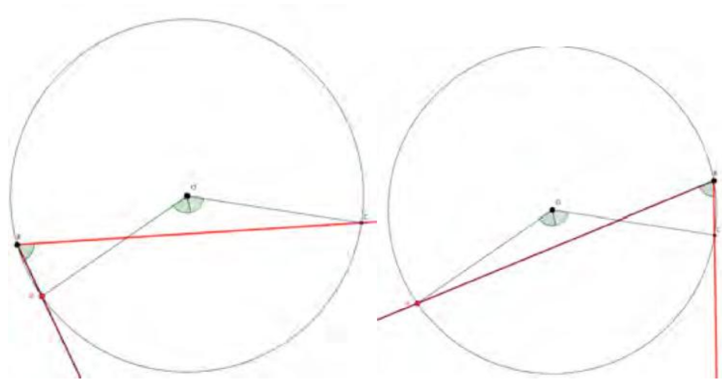
Terzo passo: conclusione
Per quella determinata posizione di B, risulta che

l'angolo AOC è il doppio dell'angolo ABC

AOC=AOD+DOC=$2\beta + 2\gamma = 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$.

Ma questo angolo non cambia perché non cambia quindi, qualunque sia la posizione di B, il raggio OC forma lo stesso angolo con il raggio AO che è fisso perché A è fisso, e **per questo il punto C non cambia posizione!**

Quarto passo (un po' di critica)
Dopo aver convinto gli studenti della dimostrazione chiediamo:
-Cosa non funziona in questo geniale ragionamento di Euclide?
-Va sempre bene per tutte le posizioni di B? Cosa succede in queste posizioni?



-L'angolo al centro è ancora il doppio dell'angolo alla circonferenza? Riusciamo a risolvere da soli questo problema o abbiamo ancora bisogno dell'aiuto di Euclide?
Si può porre la questione agli studenti per vedere se qualcuno di loro riesce a costruire un perché le cose continuano a funzionare anche quando i triangoli si intrecciano. L'insegnante può dare come indicazione quella di studiare ancora gli angoli dei triangoli AOB e COB che anche se intrecciati esistono sempre.

Quinto passo
A questo punto possiamo fissare bene le conclusioni.
Diamo queste conclusioni senza figure chiedendo agli studenti di imparare a memoria questi fatti e di farsi loro una figura esplicativa.

Data una circonferenza di centro O e due suoi punto A e B l'angolo AOB si chiama angolo al centro che insiste sull'arco AB.

Se AB è un diametro l'angolo al centro è l'angolo piatto di 180 gradi.
Data una circonferenza due suoi punti A e B e un punto sul più grande dei due archi AB, l'angolo APO si chiama angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AB.

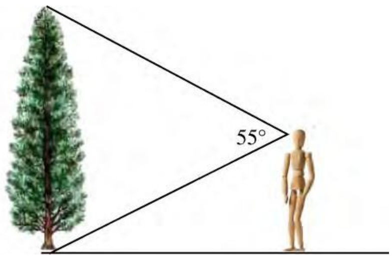
Se i due archi sono uguali, cioè se AB è un diametro, il punto P può scegliersi in una qualunque delle due semicirconferenze.

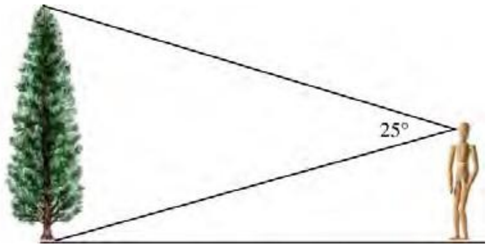
Teorema Euclide, Elementi, libro III proposizione 20
In una circonferenza l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza quando i due angoli insistono sullo stesso arco.

Osserviamo che questo risultato comprende anche, come caso particolare, quello relativo ai triangoli inscritti in mezza circonferenza. Infatti se l'angolo alla circonferenza è di 90 gradi quello al centro è di 180 e quindi AB è un diametro. Viceversa se un triangolo inscritto in una circonferenza ha un lato AB uguale a un diametro allora l'angolo alla circonferenza ACB essendo la metà di un angolo piatto dovrà essere rettangolo.

Elementi di geometria della visione

Secondo un modello matematico semplificato della visione che risale a Euclide, diciamo che la grandezza apparente di un oggetto che stiamo guardando è data dall'ampiezza dell'angolo, chiamato angolo visivo, col quale traguardiamo l'oggetto. Questa ampiezza viene misurata in gradi.





Questo modello permette di quantificare la grandezza apparente e di fare delle valutazioni quantitative. Nella figura l'omino a sinistra vede il cipresso grande 55 gradi, quello a destra, che si è allontanato dalla pianta di qualche metro, lo vede più piccolo , esattamente lo vede grande 25 gradi. In questo contesto la grandezza di un segmento è misurata dalla sua lunghezza mentre la sua grandezza apparente è misurata dall'ampiezza dell'angolo visivo. Mentre la lunghezza, fissata l'unità di misura, è una misura assoluta, la sua grandezza apparente dipende dal punto di vista: oggetti di dimensioni diverse possono apparire uguali, come accade ad esempio per la luna e il sole, e oggetti uguali possono apparire di grandezza molto diverse cambiando punto di vista. La circonferenza racchiude in se questi due aspetti.

Equidistanza:

> una circonferenza è l'insieme dei punti del piano che hanno la stessa distanza da un dato punto.

Equivisione:

> una circonferenza è l'insieme dei punti di un piano dai quali un dato segmento è visto con lo stesso angolo.

Tavola 1

Si ha a disposizione un foglio A4 con disegnato un segmento AB, un goniometro ed una squadra: bisogna costruire tutti i punti del piano dai quali il segmento AB è visto sotto un angolo di 20°, di 30°, di 40°, di 50°.

Tavola 2

Colorare l'insieme dei punti per i quali il segmento AB è visto sotto un angolo maggiore o uguale ad α.

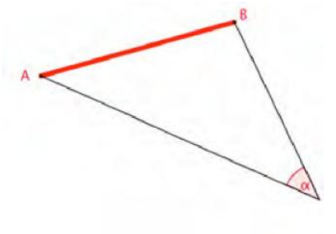


Tavola 3

Colorare l'insieme dei punti dai quali il segmento AB è visto sotto un angolo più grande di β e più piccolo di α.

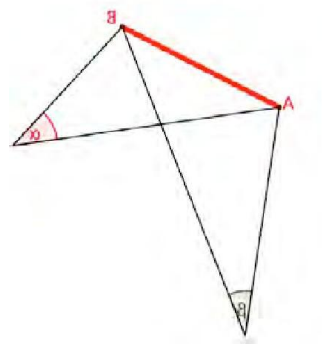
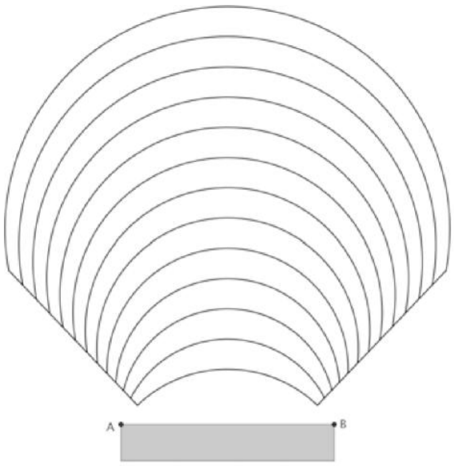


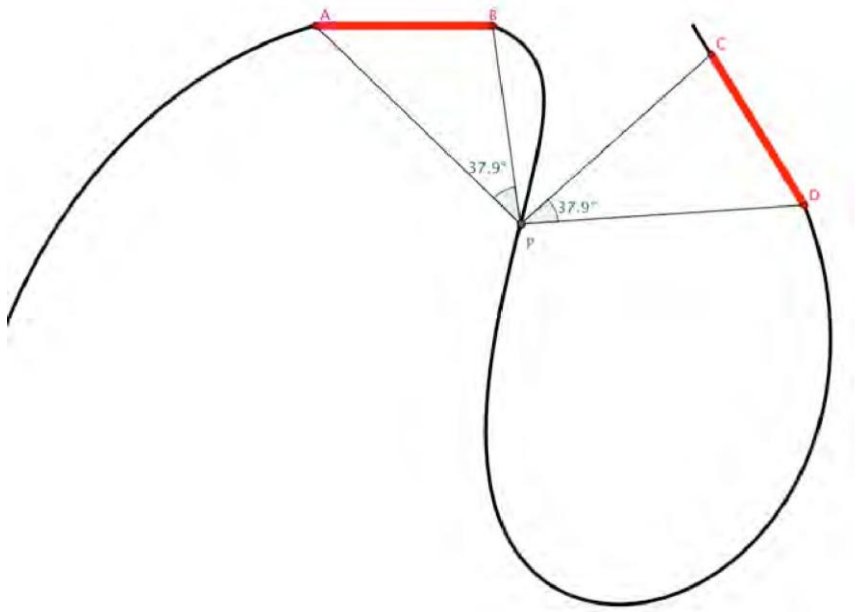
Tavola 4 Il rudere

Gli abitanti del quartiere rappresentato nella mappa intendono costruire un belvedere lungo la strada grigia dal quale poter ammirare nel modo migliore i ruderi di un antico acquedotto romano (arancione nella figura). In quale punto è meglio costruire il belvedere.

Tavola 4. L’antico anfiteatro (vedi il testo sulla tavola allegata)

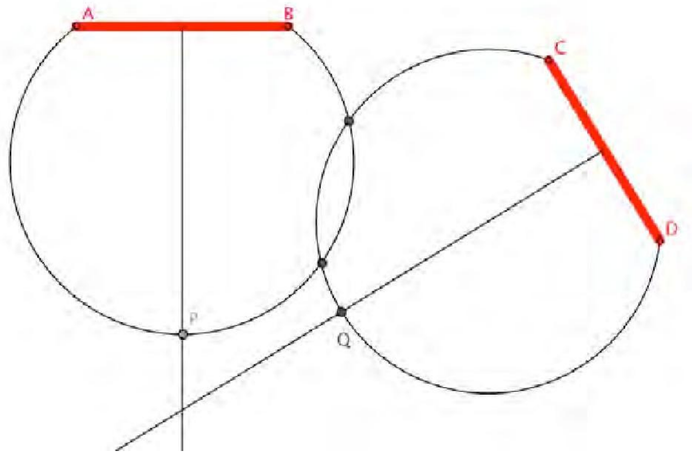


Problema (molto difficile che può essere risolto solo geometricamente con geogebra)
Ci sono due segmenti AB e CD della stessa lunghezza. Trovare un cammino seguendo il quale i due segmenti sono visti sempre sotto lo stesso angolo.
Ecco la soluzione: da ogni punto P del cammino nero i due segmenti AB e CD sono visti con lo stesso angolo



La soluzione si ottiene nel modo seguente:

1. si disegnano gli assi dei segmenti AB e CD;
2. si sceglie un punto P (variabile) sull’asse di AB;
3. si riporta sull’asse di CD un punto Q a una distanza da CD uguale alla distanza di P da AB;
4. si tracciano le due circonferenze (che risultano quindi uguali) per i punti ABP e CDQ.
5. si segnano i punti di intersezione di queste circonferenze (se non sono visibili si sposta P aumentando il raggio delle circonferenze);
6. il luogo dei punti di intersezione al variare di P sono luoghi di equi visione.



Gli angoli alla circonferenza di questi due archi sono uguali perché i segmenti AB e CD sono uguali e i raggi dei cerchi sono uguali. Quindi nei punti nei quali i due archi di circonferenza si intersecano i due segmenti sono visti sotto lo stesso angolo. Il luogo di tali punti al variare di P descrive il cammino che stiamo cercando.