La geometria del cerchio

Prima parte

L’obiettivo è quello di portare gli studenti a scoprire e poi a dimostrare due teoremi fondamentali sulla circonferenza:

A) Un triangolo inscritto in una circonferenza ha come lato un diametro se e solo se è rettangolo
B) L’angolo al centro è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza.

Normalmente A è presentato come un corollario di B. Qua invece consideriamo A come cognitivamente propedeutico a B.
Il teorema A è uno dei primi risultati non ovvi della geometria e come tale deve destare meraviglia (perché non ovvio) e, per questo, dovrebbe suscitare interesse nel ricercare il perché è vero.

I prerequisiti sono molto semplici e potrebbero essere richiamati via via:

- Triangoli con due lati uguali hanno anche i corrispondenti angoli uguali e viceversa
- La somma degli angoli di un triangolo è 180°
- I criteri di congruenza dei triangoli.

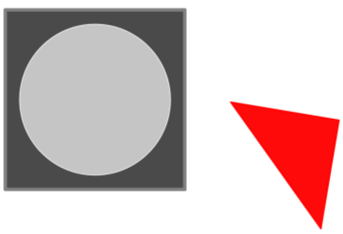
Questo percorso è pensato come un percorso iniziale di geometria razionale.
Le definizioni e gli enunciati dei teoremi vanno scritti sul quaderno con le stesse parole da tutti sotto dettato e imparati a memoria.

Attività 1(del mezzo quadrato)

Lo scopo di questa prima attività è quella di determinare il centro di un cerchio dato. Si utilizza inizialmente:

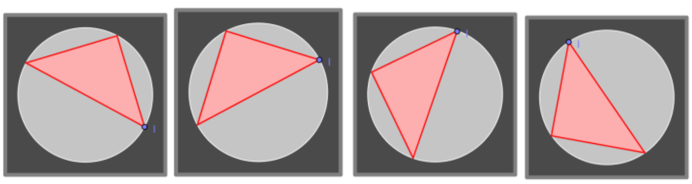
- un cerchio incavato in un quadrato
- un foglio A4 bianco su cui è appoggiato il cerchio
- un mezzo quadrato (triangolo rettangolo isoscele)

Ci sono molti modi per farlo ma si vuole trovarlo usando il triangolo inscritto. Questo perché l’obiettivo di questa prima attività e far scoprire agli studenti che l’ipotenusa del triangolo è un diametro. Chi ha delle idee le dice. Chi vuole fare delle prove col triangolo le fa.

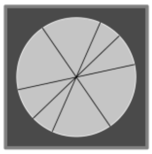


Qualche studente fa girare il quadrato dentro la circonferenza e intuisce che l’ipotenusa del triangolo è un diametro. Se l’idea non viene a nessuno studente, è l’insegnante che ruota il triangolo internamente alla circonferenza e domanda agli studenti:

- Cosa vedete?



Vedono mezzo cerchio vuoto e mezzo cerchio col triangolo. Cosa dicono? Quali parole usano? Ci aspettiamo che capiscano il problema, che vedano dove si trova il centro, ma che non sappiano esprimersi.
Fissata una posizione del triangolo, con una matita l'insegnante disegna sul foglio bianco su cui è appoggiato il cerchio, l'ipotenusa del triangolo. L'insegnante fare questa operazione agli studenti più volte tenendo ben fissa la circonferenza. Vediamo che *tutte le ipotenuse si incontrano in un punto*: è quello il centro della circonferenza! Questa esperienza deve meravigliare: deve essere presentata come una scoperta di tutti.



Riprendere la definizione di Euclide di **cerchio**, **circonferenza**, **raggio** e **diametro**. Le definizioni devono essere imparate a memoria e scritte in buona evidenza nel quaderno.

Si richiama l'uso del compasso per tracciare le circonferenze.
L'insegnante chiede:
- Perché il centro del cerchio è il punto medio dell'ipotenusa del triangolo rettangolo?

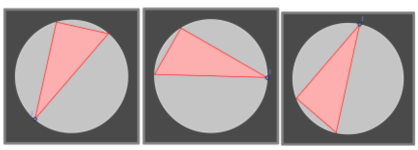
Una dimostrazione "fisica" consiste nell'osservare che quel punto rimane fisso durante tutti i possibili spostamenti del triangolo internamente al cerchio.
- Ma perché rimane fisso?
- Perché si vede!

A questo livello non occorre dare spiegazioni o dimostrazioni. Questa prima fase ha il solo scopo di sviluppare l'intuizione libera degli studenti e di dare la definizione di circonferenza e di cerchio.

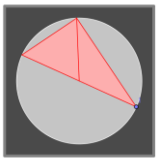
Attività 2 (del triangolo rettangolo)

L'attività si svolge nella stessa maniera e ha come duplice obiettivo, quello di determinare il centro del cerchio e quello di arrivare intuitivamente al teorema A). Invece del triangolo rettangolo isoscele si dispone ora di un triangolo rettangolo inscrivibile nella circonferenza.
Si utilizza:

- un cerchio incavato in un quadrato
- un foglio A4 bianco su cui è appoggiato il cerchio
- un triangolo rettangolo non isoscele
- uno schermo collegato a un computer per proiettare una immagine Geogebra



Si chiede agli studenti di descrivere il triangolo come prima facendoglielo toccare ed indicare col dito cateti angoli ecc. Deve essere molto chiaro che il triangolo è rettangolo, come quello di prima, inscrivibile nella circonferenza, ma non isoscele.
Come prima, si cerca di trovare il centro della circonferenza usando il nuovo triangolo.
Girando il triangolo trasparente dentro la circonferenza dopo aver tracciato dei diametri, far notare il "terzo raggio" e quindi che il punto medio dell'ipotenusa è il centro della circonferenza.



Dopo la discussione su come trovare il centro del cerchio, si fa osservare che:

l'ipotenusa del triangolo rettangolo inscritto nel cerchio è un diametro del cerchio!

sia che il triangolo sia isoscele sia che non lo sia.

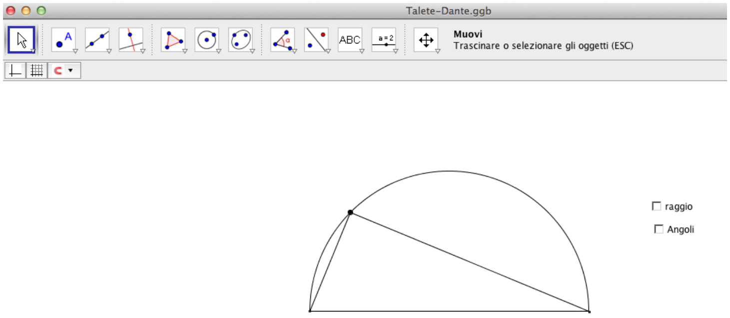
L'obiettivo è intuire questo risultato non evidente, non darne una dimostrazione, che sarà data più tardi.

Vediamo, nel seguito di questa attività, se gli studenti intuiscono che, viceversa,

ogni triangolo inscritto in una circonferenza che abbia un diametro come lato è rettangolo.

Questo teorema è forse uno tra i primi fatti non banali della geometria[1].

L'insegnante mostra una animazione Geogebra dove si vede un triangolo variabile inscritto in una semicirconferenza.



Domanda:

- Perché il triangolo è sempre rettangolo?

---

[1] Proclo(V sec. d.C.) storico della matematica lo attribuisce a Talete (VI sec. a.C.). Il teorema viene citato da Dante e Aristotele lo usa per dimostrare che il pensiero esercita una attività creativa.

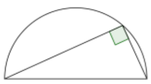
Ecco i due brani.

(Paradiso canto XIII, Dante incontra Re Salomone) Salomone chiede a Dio, tra le altre cose

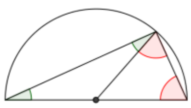
o se del mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch' un retto non avesse.

Aristotele nella metafisica chiede:

Perché in generale un angolo in un semicerchio è retto?

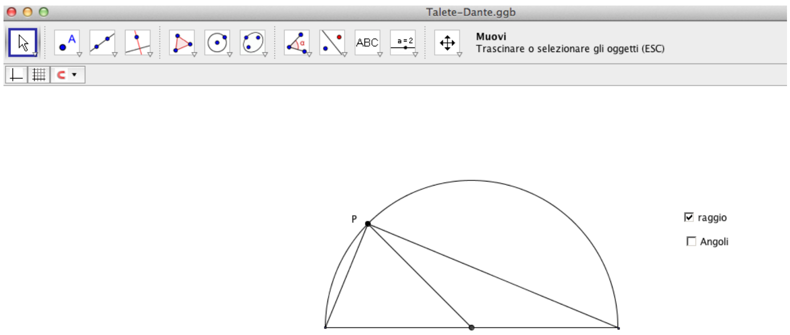


Se sono uguali tre segmenti, sia le due basi che la retta apposta dal mezzo, è chiaro anche solo a guardare [la figura] per chi conosce questo.

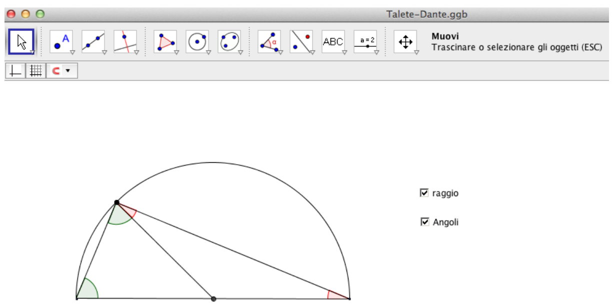


Così che è chiaro che ciò che è in potenza viene scoperto riportandolo ad una attività: causa ne è che il pensiero è attività...

Questa domanda deve creare curiosità. E' molto importante ascoltare le risposte degli studenti e se possibile registrarle. Dedicare molto spazio a questo momento perché questo è forse il primo incontro degli studenti con una dimostrazione matematica. Verificare se a qualche studente viene in mente di aggiungere il raggio dal vertice al centro del triangolo. Altrimenti lo aggiunge l'insegnante compiendo il salto creativo:



A questo punto ricordare che in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali ma qua le basi sono "per aria". Vedere se gli studenti vedono i due triangoli isosceli o se hanno difficoltà.
Dopo la discussione far apparire gli angoli uguali in due colori diversi: rosso e verde.



Continuare a muovere il punto P per vedere come cambiano i triangoli e ritrovare come caso particolare il caso del triangolo rettangolo isoscele.
Ricordare infine che la somma degli angoli interni in un triangolo è sempre 180° e quindi

due rossi + due verdi fa 180°

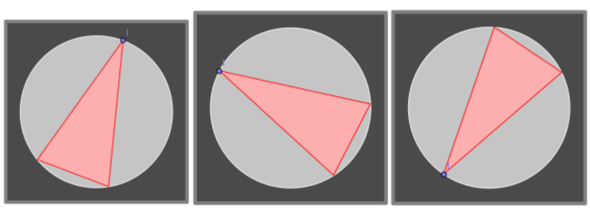
e quindi

rosso + verde fa SEMPRE 90°!

Fare questa dimostrazione molto lentamente e più volte sottolineando i diversi passaggi.

Attività 3 (del triangolo isoscele)

Lo stesso materiale ma ora i triangoli sono isosceli. Lo stesso problema: trova il centro della circonferenza.
Questa attività deve portare gli studenti a capire il concetto di asse qua presentato come altezza (relativa alla base) di un triangolo isoscele.



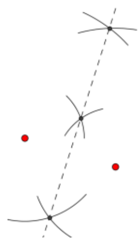
In questa situazione si può insistere sulla geometria dei triangoli isosceli. Angoli alla base uguali, lati obliqui uguali.
L'obiettivo è quello di portare gli studenti all'idea di tracciare l'altezza del triangolo isoscele: l'altezza divide la base in due parti uguali e questo dovrebbe aiutare a stabilire che il centro del cerchio si trova sull'altezza.
Disegnare l'altezza del triangolo con un pennarello ad alcol (in modo che possa essere cancellata con l'alcol) e ruotare il triangolo.
Si possono disegnare più altezze sul foglio bianco sul quale è appoggiata la circonferenza segnando a matita la posizione del vertice del triangolo e il punto dove cade l'altezza. Intersecando queste altezze si trova il centro.
Trovato il punto giusto conviene disegnare quel punto sul triangolo e vedere che ruotando il triangolo rimane fisso. E' una dimostrazione fisica e intuitiva che il centro si trova sulla intersezione degli assi.

Attività 4 (**dell'equidistanza**)

Si utilizza

- Un foglio bianco A4 (uno per ogni studente) dove sono segnati due punti A e B
- Un compasso e una matita
- Assigrafo (da mostrare al momento opportuno)
- Tavole di lavoro

Si chiede agli studenti di disegnare sul foglio, usando il compasso, dei punti che abbiano la stessa distanza da A e da B (almeno 4).
Verificare se gli studenti mettono i punti in uno stesso semipiano o se si accorgono che possono metterli "sopra" e anche "sotto".



Osservazione. Qualcuno disegna archi di circonferenza che non s'intersecano; poi si tenta di intersecarli con raggi qualsiasi e qualcuno con raggi pari al segmento.

Definizione. Si definisce **asse** del segmento AB la totalità (l'insieme) di tutti i punti del piano che hanno la stessa distanza da A e da B.

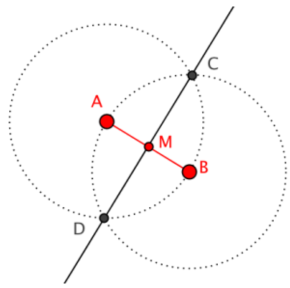
Riconosci in tali punti equidistanti da A e da B punti "particolari"? Lo scopo è che ci si accorga che tra questi punti, c'è sicuramente il punto medio M del segmento AB, essendo sicuramente equidistante da A e da B. Ma in generale:

Domande. Quanti sono tali punti in tutto? Non sarà difficile per i ragazzi affermare che sono infiniti. Ma se sono infiniti come fare a disegnarli tutti?

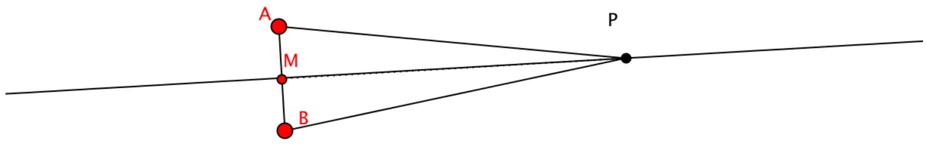
Questa è la domanda chiave. Aprire una discussione su questo punto per verificare se qualcuno ha intuito che i punti disegnati sono allineati e se ha l'idea di *tracciare* una retta che passi per tutti questi punti. Questa retta si può facilmente trovare con la riga e con il compasso. Disegnando solo due punti dell'asse se ne possono disegnare infiniti!

A questo punto non rimane che arrivare al seguente risultato:

*L'asse di un segmento è la retta **perpendicolare** al segmento e passante per **il centro** (o punto medio) del segmento.*



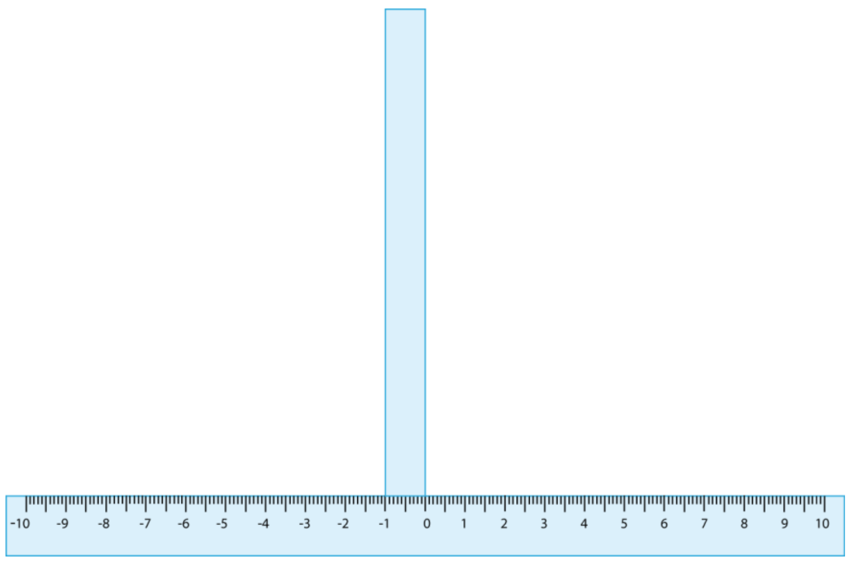
passo 1. Per il punto M non ci sono problemi essendo un punto dell'asse.



passo 2. Considerando un qualsiasi punto P dell'asse, sicuramente per definizione, PA = PB; quindi il triangolo APB è isoscele e l'angolo A è uguale all'angolo B.
passo 3. il triangolo APM sarà uguale al triangolo BPM per il primo criterio.
passo 4. Necessariamente, l'angolo AMP e BMP saranno uguali e quindi retti.

Cosa si è scoperto? Che i punti che appartengono all'asse di un segmento formano una retta che è passante per il punto medio del segmento ed è perpendicolare al segmento stesso.

A questo punto si presenta un nuovo strumento:



Assigrafo

Si discute sulla presenza dei numeri negativi, della simmetria positivo-negativo e di come si può usare lo strumento per tracciare l'asse di un segmento.
Fatto questo si distribuiscono agli studenti delle tavole di lavoro: le tavole di lavoro sono delle pagine A4 prestampate sulle quali gli studenti debbono fare degli interventi per risolvere dei problemi. Il lavoro sulle tavole va generalmente diviso in 4 fasi:

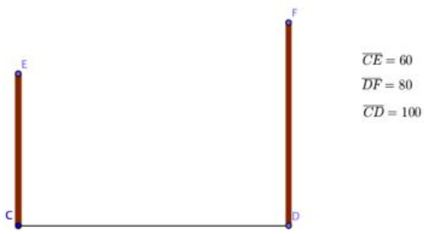
1. Leggere attentamente il testo, all'inizio con l'aiuto dell'insegnante. E' molto importante abituare gli studenti a leggere e capire le frasi della lingua parlata, prima di iniziare a fare matematica. Per questo abbiamo inserito, nella tavola 2, un problema "rinascimentale".

2. Le tavole presentano sempre un problema “non matematico” che va trasformato in un problema matematico. Anche questa è una fase molto delicata che va curata con particolare attenzione. Dalla realtà al modello matematico.
3. Trovare la soluzione del problema matematico.
4. Verificare che la soluzione trovata risolve effettivamente il problema che ci eravamo posti.

TAVOLA 1 (Il problema della fermata)
Si fornisce agli studenti il disegno seguente e l’assigrafo.

La linea nera è una strada e si tratta di trovare dove collocare la fermata dell’autobus senza privilegiare nessuno. Il testo presentato è molto semplice. Su questa falsa riga si può ampliare il racconto introducendo dei personaggi, il direttore della linea di autobus ecc ecc. Nel discutere questo problema (fase 2) va sottolineato il fatto che rappresentando le case con due punti si è fatta una astrazione, una semplificazione molto forte che però permette di trattare il problema matematicamente per ragionarci sopra. Non è rilevante la direzione che percorre l’autobus perché la strada si considera “senza spessore”. E’ interessante sentire le osservazioni anche fantasiose dei ragazzi che non vanno represse ma anzi: esse permettono di evidenziare le cose rilevanti da quelle secondarie e offrono all’insegnante lo spunto per illustrare l’idea di “modello matematico”. Può darsi che gli studenti facciano scelte diverse ed è interessante sentire le loro motivazioni. Alla fine si deve sempre verificare che le soluzioni trovate risolvano il problema (fase 4) usando il centimetro o il compasso. Quelli che vanno immediatamente alla soluzione vanno invitati a scrivere i perché delle loro scelte.

TAVOLA 2 (problema rinascimentale)
Si fornisce la TAVOLA 2 (meglio se a colori). L’insegnante legge il problema e discute la lingua in cui è scritto (è un italiano dialettale del XV secolo). Si racconta che Filippo Calandri era un insegnante di matematica che insegnava ai figli dei mercanti l’aritmetica, l’algebra e la geometria ecc ecc.
Poi suggerisce agli studenti di disegnare in scala le due torri usando riga, squadra e centimetro: si deve decidere il rapporto di scala: 10 braccia= un centimetro; oppure, visto che le misure sono date da numeri pari, 20 braccia = un centimetro; oppure, se si vuole fare un disegno più grande ed essere più precisi, 5 braccia = un centimetro. Se si usano scale diverse è molto importante nella fase 4 verificare che le soluzioni, che andranno espresse in braccia, sono uguali. Verrà prodotta una figura di questo tipo.



L’insegnante insiste molto sul passaggio dal disegno delle due torri alla sua schematizzazione matematica. Non è un passaggio facile per chi non lo ha mai fatto. Insistere, come nel caso precedente, sulla approssimazione che deriva in questo passaggio. Il modello matematico è una

enorme semplificazione della realtà (le torri sono diventate segmenti!) che però permette di ragionare e trovare soluzioni ragionevoli. Questo conclude la fase 2.
Per trovare la posizione della fonte si usa l'assigrafo e si interseca l'asse del segmento EF (le due cime delle torri) con la retta orizzontale (fase 3). Alla fine si misurano i centimetri che separano il punto trovato con le due torri. La risposta finale è data trasformando i centimetri in braccia e si confrontano i risultati trovati (fase 4).

Le tavole seguenti pongono problemi di giustizia e convenienza. Poiché la matematica non è un'opinione, essa diventa uno strumento fondamentale per dirimere controversie suggerire le soluzioni eque. Sottolineare fortemente questo aspetto.

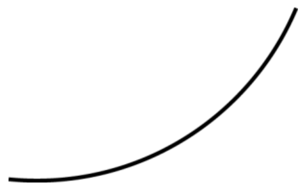
TAVOLA 3 (Dove costruire lo scalo?)
TAVOLA 4 (Tra le isole)
TAVOLA 5 (Runa bandiera)

In questi esercizi si pone il problema di intersecare due assi. La cosa non è così evidente come a noi può apparire. Si tratta di considerare due condizioni diverse simultaneamente cosa, da un punto di vista cognitivo, non automatica per gli studenti neofiti.

TAVOLA 6 (dei due assi)
Si consegna agli studenti una tavola con le tre case e si chiede dove si deve scavare il pozzo.

Se non viene l'idea di intersecare i due assi si può procedere per tentativi. Non reprimere alcuna idea. Tentare è sempre una attività da incoraggiare al massimo. Si deve vedere se vi sono altre idee meno empiriche e come ragionano gli studenti. Si deve arrivare all'idea di intersecare i due assi.
In questo problema e nei successivi valgono le stesse indicazioni metodologiche date sopra.

TAVOLA 7 (Cosa è e cosa non è una circonferenza)
Viene fornito un arco di circonferenza e si chiede di trovare il centro.

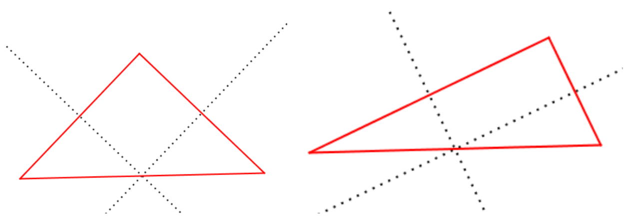


Si devono scegliere tre punti sull’arco costruire i due assi e vedere dove si intersecano. Tracciare poi la circonferenza con quel centro e verificare che tutti i punti del cerchio tracciato col compasso si sovrappongono a tutti i punti della curva data. Con tre soli punti abbiamo identificato gli infiniti punti dell’arco dato e, volendo, possiamo anche prolungare col compasso la curva “in modo naturale”, mantenendo cioè la stessa curvatura. Il centro potrebbe trovarsi in una posizione scomoda o addirittura fuori dal foglio di lavoro.
Discutere sul fatto che i tre punti possono essere scelti dove si vuole e, probabilmente, gli studenti avranno scelto punti diversi, cosa che facilita la discussione. Ragionare su questo: l’ipotesi ci assicura che si tratta di un arco di circonferenza e quindi tutti i punti distano allo stesso modo dal centro, per questo ogni scelta è legittima.

L’arco sulla parte inferiore del foglio non è un arco di circonferenza. Perché?
Raccogliere le idee degli studenti e segnarle.
Se si ritiene la classe adatta, è questa una buona occasione per introdurre il ragionamento per assurdo: se fosse un arco di circonferenza ...ecc, ecc, ... ma invece... ecc. Vedere se il ragionamento per assurdo convince.
Un modo più sperimentale, ma essenzialmente equivalente, di vedere la cosa è trovare l’eventuale centro usando tre punti. Tracciare poi col compasso il cerchio con quel eventuale centro e verificare che non si sovrappone all’arco dato.

Osservazione, teorema e costruzione proposto dall’insegnante.

Per tre punti (non allineati) passa una e una sola circonferenza che si costruisce trovando il punto di intersezione dei due assi.
Con questa osservazione possiamo dare una dimostrazione chiara dei due problemi iniziali: quello del mezzo quadrato e quello del triangolo rettangolo.



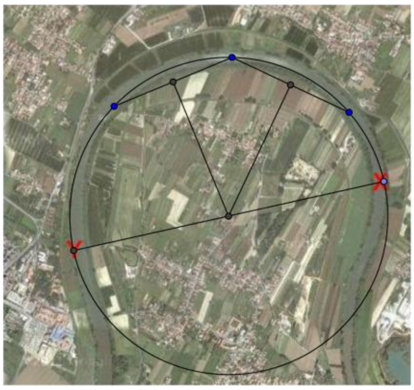
Si passa volendo all’uso di **Geogebra** facendo costruire l’asse di un segmento e poi la circonferenza per tre punti dati A,B,C, trovando l’intersezione dei due assi, il centro e infine la circonferenza con quel centro e il raggio OA (usando il comando “asse” che è la versione digitale del nostro assigrafo, ma non quello “circonferenza per tre punti” che va tolto dal menù).

Alla scoperta degli archi di circonferenza.

Diamo qua qualche spunto ma l'insegnante può trovare molti altri esempi che arricchiscono la trattazione delle circonferenze.
Si propone (Tavola 8) questa annunciazione di Beato Angelico dove ci sono alcuni probabili cerchi. Sarebbe meglio dare la copia a colori per sottolineare la bellezza del quadro. In questa tavola manca il testo ma è l'insegnante che parla commentando il dipinto.

Il pittore è stato bravo come Giotto? (raccontare la storia del cerchio di Giotto). Si tratta di verificare sulla riproduzione del dipinto se gli archi tracciati sono o non sono archi di circonferenze. Ogni studente può scegliere il suo arco, comprese le aureole dell'angelo e della vergine. Per risolvere il problema si può usare l'assigrafo.
Cosa racconta questo dipinto? L'insegnante può scegliere vari dipinti secondo i suoi gusti anche in collaborazione con l'insegnante di storia dell'arte.

La ricerca di possibili archi di circonferenza viene fatta nella massima libertà e sentendo le idee dei ragazzi. Una possibilità già sperimentata riguarda lo studio dei fiumi. In questo caso, invece di trovare manualmente con l'assigrafo il centro dell'eventuale circonferenza, si può usare Geogebra. Si importano su un foglio di lavoro Geogebra delle immagini da googlemap e si lavora su quelle. L'esempio che proponiamo si riferisce all'Arno vicino a Pisa.



L'insegnante può fare lo studio su una lavagna LIM per verificare che si tratti di un arco di circonferenza e sapendo la scala, calcolare il raggio.
Si può ipotizzare che se l'ansa del fiume è circolare si tratta probabilmente di un lavoro di canalizzazione delle acque fatto dall'uomo.

Ci sono cerchi in natura? Sentire le risposte.
La luna piena, l’arcobaleno, le onde di un sasso che cade nello stagno, la pupilla dell’occhio,ecc. Ci si può sbizzarrire alla ricerca di cerchi esistenti in natura e nelle opere dell’uomo: pittura, architettura ecc. e proporre esercizi simili.
Perché ci sono cerchi in natura?