Un “famoso teorema”

Un famoso teorema

Si deve premettere:

1) Definizione di quadrato (già nota nella scuola media)

2) Prop. I.46: Costruzione del quadrato di lato il segmento dato con riga e compasso.

Se la costruzione viene fatta fare mediante animazione si può chiedere che sia *stabile* nel senso che spostando i vertici del quadrilatero, questi conservi le proprietà geometriche che lo definiscono.

Un famoso teorema

Una possibile costruzione del quadrato (stabile) di lato AB:

1) tracciare una retta su cui prendere il segmento AB;
2) costruire la perpendicolare al segmento in A;
3) Riportare AB sulla perpendicolare tramite il compasso; si determina il punto D;
4) Da D si tracci la parallela ad AB, da B si tracci la parallela ad AD; detto C il punto d'intersezione delle due parallele.

ABCD è un quadrato. Infatti si verifica che ha i quattro lati uguali e gli angoli tutti uguali perché retti.

Un famoso teorema

Si può verificare, nel seguente ordine, la validità delle seguenti proprietà :

Proprietà 1: Le diagonali BD e AC sono bisettrici degli angoli B e D e, A e C rispettivamente;

Proprietà 2 : le diagonali BD e AC sono uguali.

Detto O il punto di intersezione delle due diagonali:

Proprietà 3: le diagonali sono perpendicolari nel punto O;

Proprietà 4: le diagonali si bisecano nel punto O.

Teorema di Pitagora

Per comprendere la Prop. I.47 occorrono ulteriori premesse:

1) Definizione di circonferenza
2) Il terzo postulato
3) 3° criterio di uguaglianza (Prop. I.8)
   - Conseguenza: trasporto di un angolo
4) 1° criterio di uguaglianza (Prop. I.4)
5) 2° criterio di uguaglianza (Prop. I.26)

Nell'impianto originario euclideo, presumibilmente le prime due sono postulate (cfr Russo).

Teorema di Pitagora

Per comprendere la Prop. I.47 occorrono ulteriori premesse:

1) Definizione di circonferenza

Un *cerchio* è una figura piana delimitata da una linea, (detta *circonferenza*) tale che tutte le rette incidenti su di essa da un punto (detto *centro*) posto all'interno della figura siano *uguali* tra loro .

Riflettere sulla parola "*uguali*"

Teorema di Pitagora

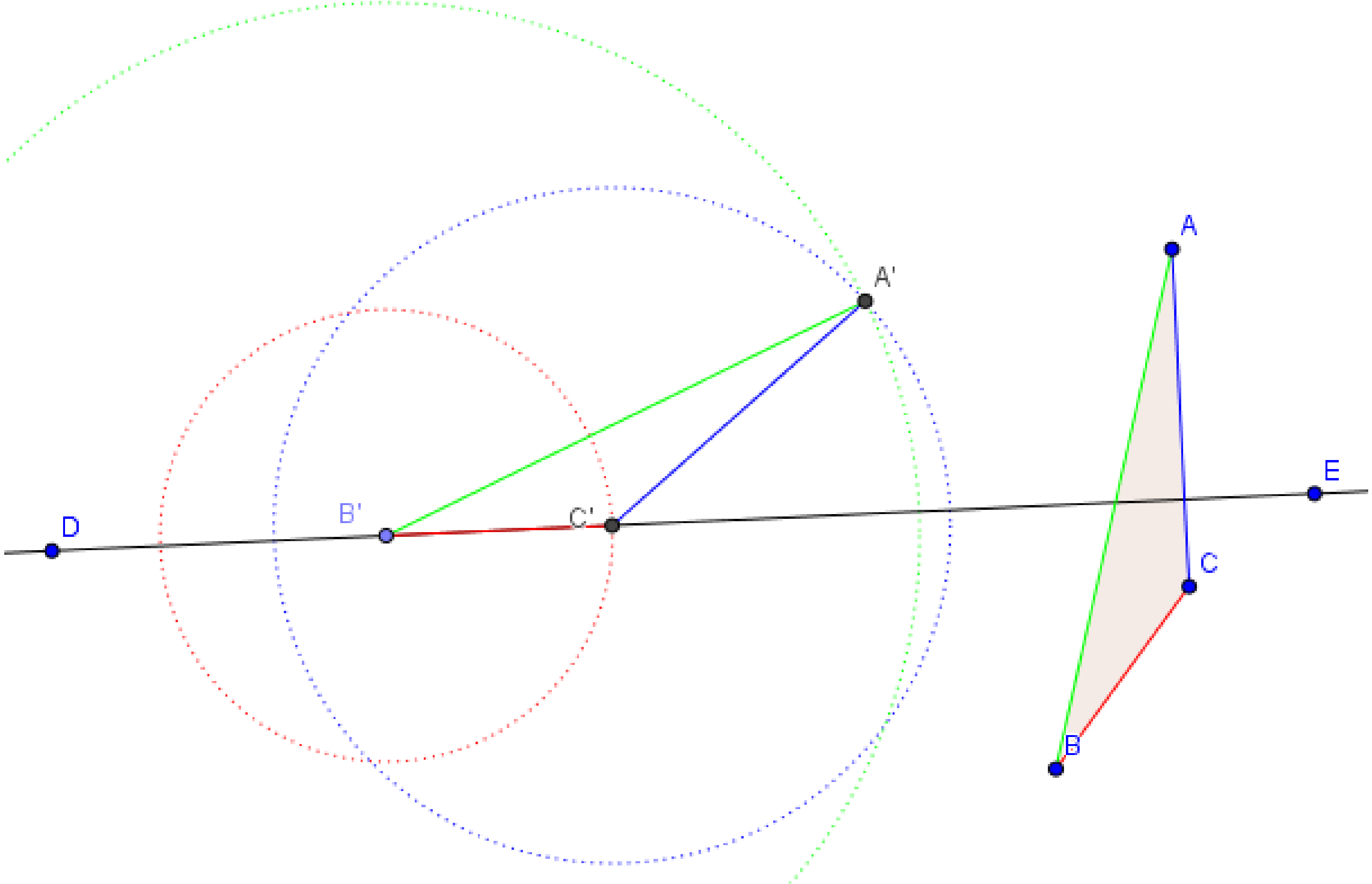
Per comprendere la Prop. I.47 occorrono alcune premesse:

2) Il terzo postulato

Si richieda di poter descrivere un cerchio con qualsiasi centro e raggio

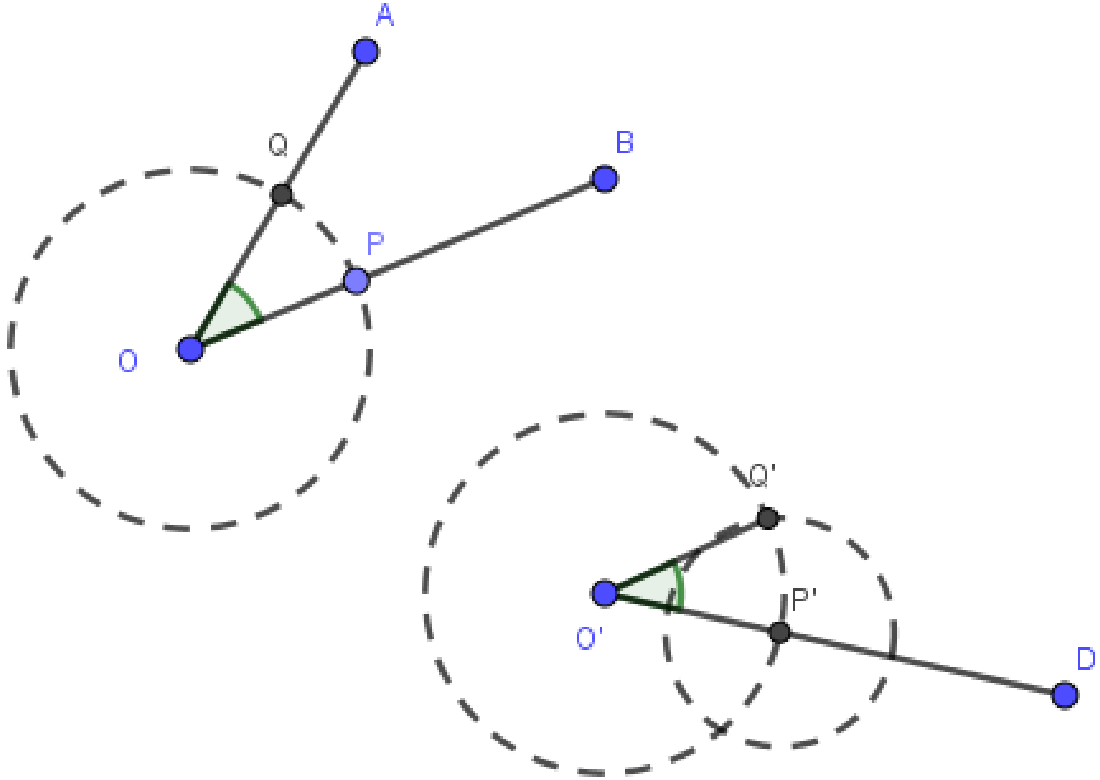
3° criterio di uguaglianza (Prop. I.8)

Dato un triangolo qualunque ABC, se ne costruisce uno A’B’C’ che abbia gli stessi lati. Mediante una animazione interattiva, si può verificare, muovendo i punti D ed E della figura, che i due triangoli coincidono sempre al variare dei lati di ABC.



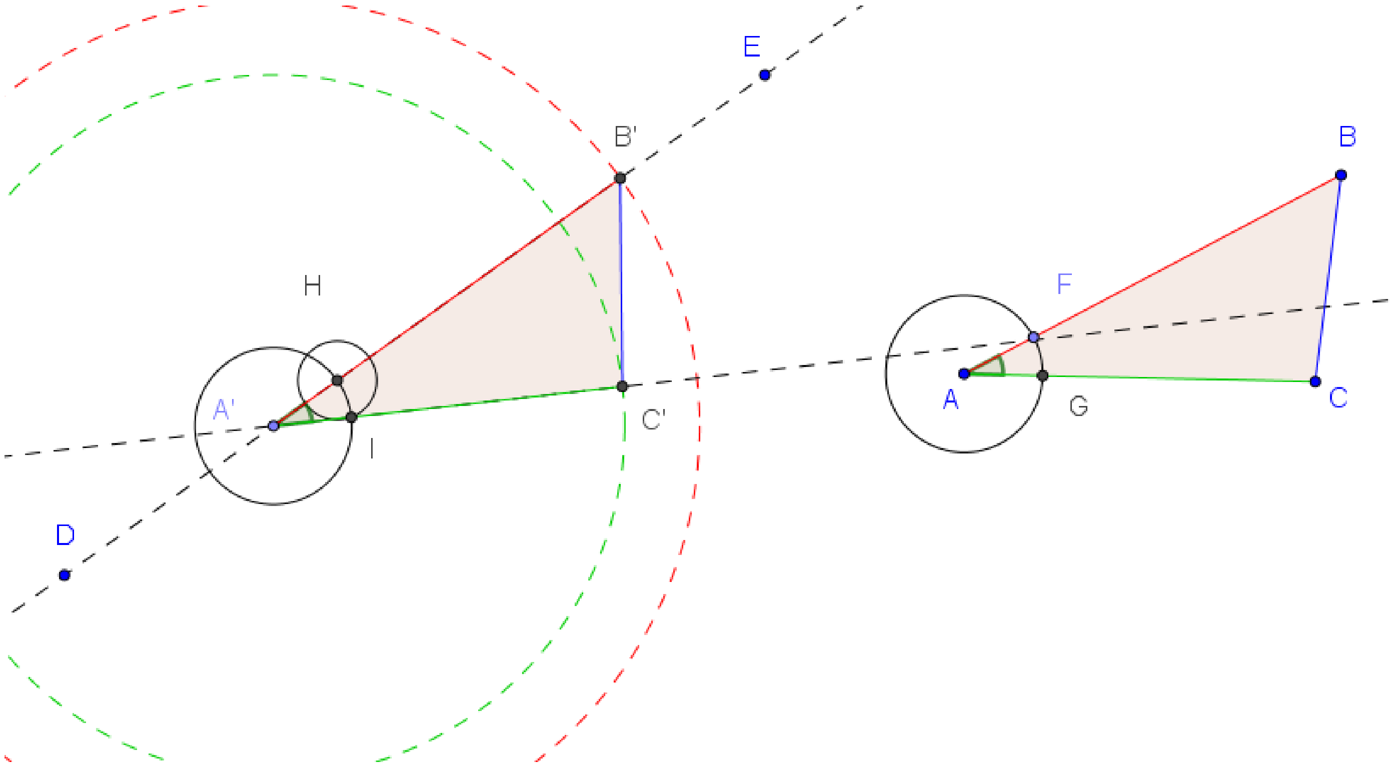
Conseguenza: trasporto di un angolo

La precedente costruzione è già di per se sufficiente per lo scopo prefissato nel titolo: tuttavia se ne può trovare una più “rapida”.
Si vuole trasportare AOB a formare un nuovo angolo che abbia vertice O’ e lato prefissato (OD). A tal fine si riporta la circonferenza di raggio qualsiasi OP sulla direzione O’D di centro O’, trovando P’. In esso si punta il compasso con apertura PQ, trovando Q’. L’angolo Q’O’P’ è uguale all’angolo AOB per uguaglianza dei triangoli QOP e Q’O’P’.



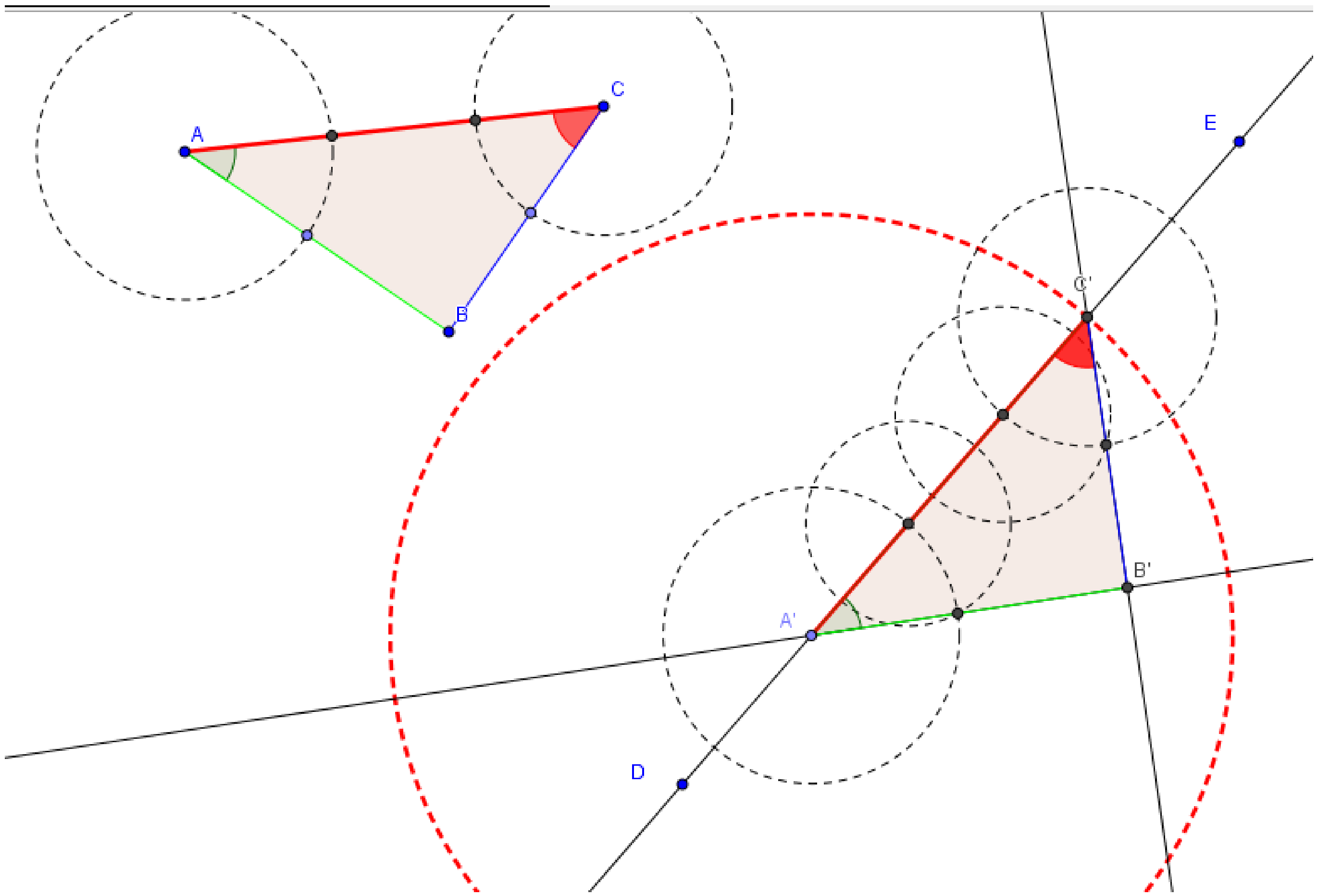
1° criterio di uguaglianza ([Prop. I.4])

Si parte dal triangolo ABC, si traccia una retta qualsiasi DE, su questa si riporta AB ottenendo A'B‘;
su A' si trasporta l'angolo A; si traccia la retta che delinea l'angolo; su tale retta si riporta A'C'. Si unisce B' con C’, il triangolo ottenuto A’B’C’ si verifica essere sempre uguale ad ABC spostando i punti D e E.



2° criterio di uguaglianza (Prop. I.26)

Si traccia il generico triangolo ABC, si traccia DE e si riporta AC su questa retta, sia A'C'. Si riportano su A' e C' gli angoli A e C e si tracciano le rette che definiscono gli angoli. Il loro punto d'intersezione da' il terzo vertice B'. Si verifica che il triangolo A'B'C' è sempre uguale al triangolo ABC mediante lo spostamento dei punti D ed E.



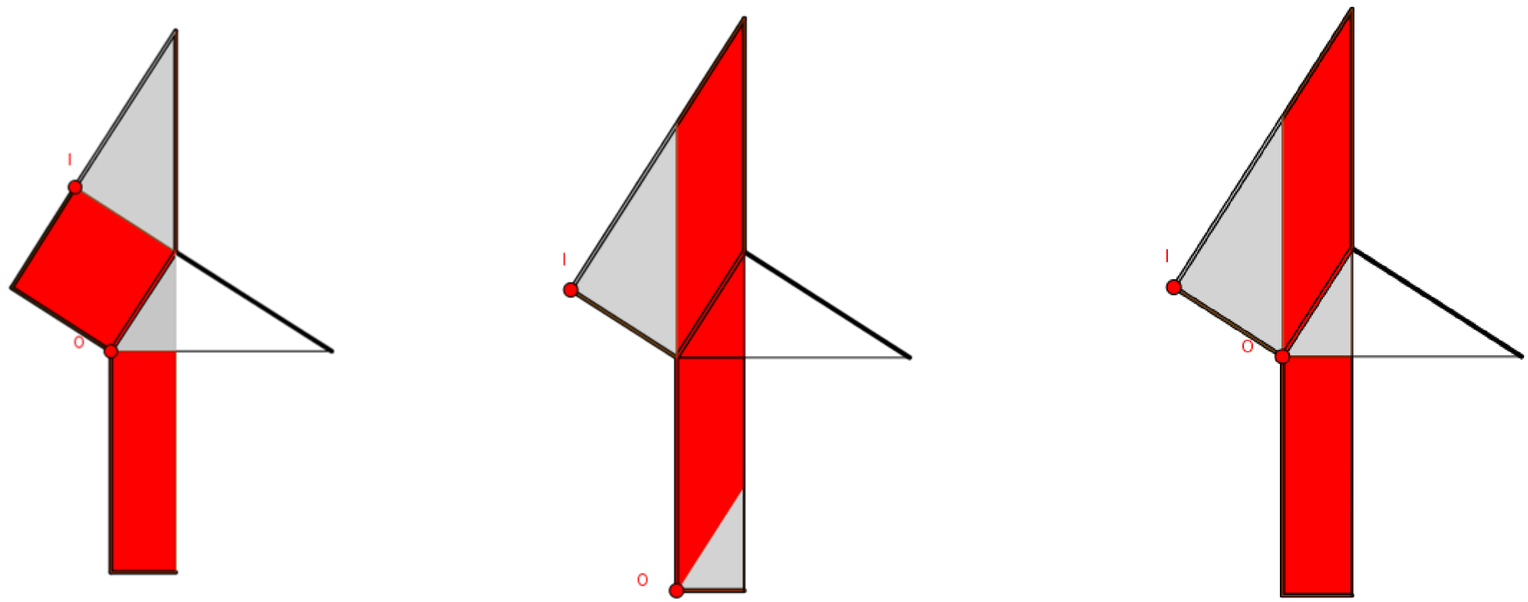
Il teorema di Pitagora.

Esistono varie dimostrazioni.

Si propone la dimostrazione di ispirazione montessoriana.

Il teorema di Pitagora.

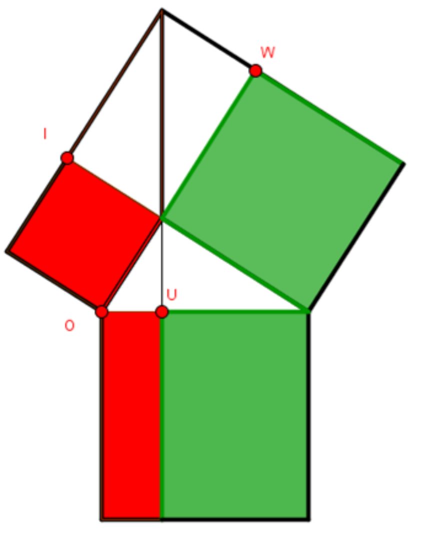
Occorre il “primo” teorema di Euclide: “muovendo” il triangolo grigio nel trapezio rosso, si verifica che il quadrato rosso è equivalente al parallelogramma superiore, che è uguale a quello inferiore rosso (serve dimostrare che il triangolo di partenza sia uguale al grigio e ciò deriva dal 2 criterio), che a sua volta è equivalente al rettangolo rosso.



In definitiva: il quadrato costruito su un cateto di un triangolo rettangolo è equivalente al rettangolo i cui lati sono la proiezione del cateto sull’ipotenusa e l’ipotenusa stessa.

Il teorema di Pitagora.

Per dimostrare il teorema di Pitagora si applica il primo di Euclide due volte, derivando l'equivalenza tra la somma del quadrato rosso e verde con il quadrato ottenuto dalla somma del rettangolo rosso e verde.



Il teorema di Pitagora

un possibile percorso per
la scuola media

Il teorema di Pitagora:
un possibile percorso per
la scuola media

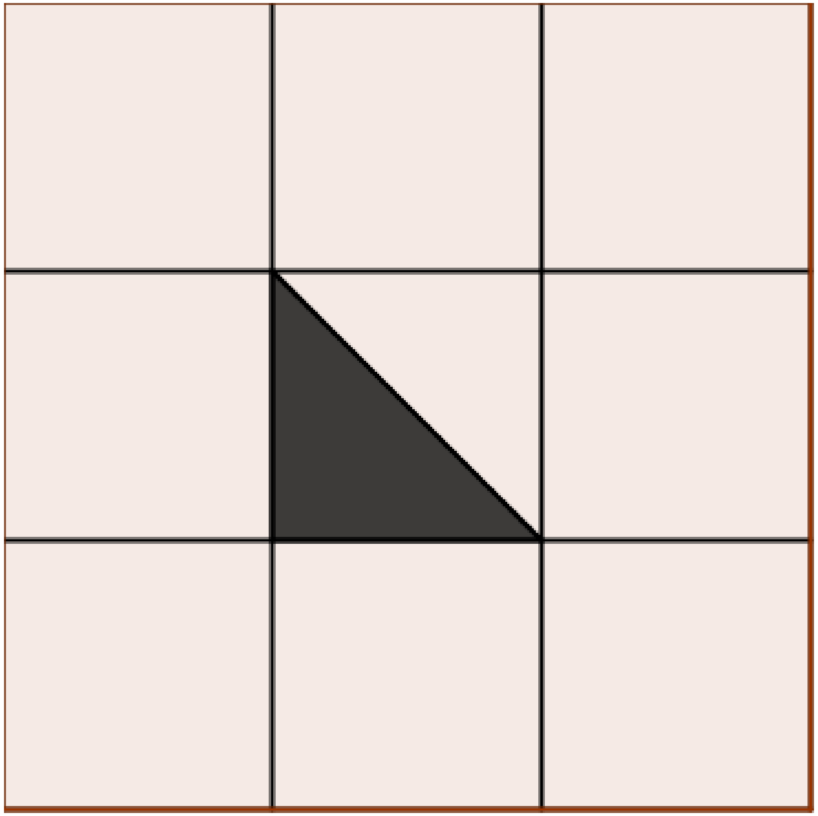
Elementi caratterizzanti

Per evitare lunga catena di passaggi logici
che, in alcuni casi, sembrano allontanare dall’obiettivo prefissato
e per questo motivo, in generale, non deducibili autonomamente dagli studenti

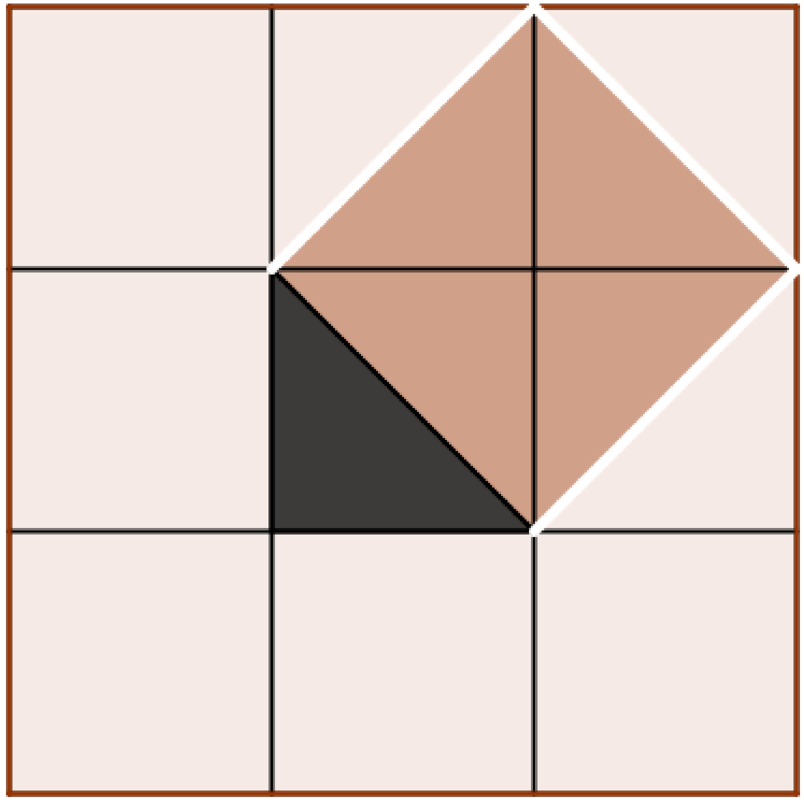
Si propone di
Imparare a trovare le strutture stabili
lavorando direttamente sulle figure geometriche

al fine di scoprire le proprietà delle figure in esame.

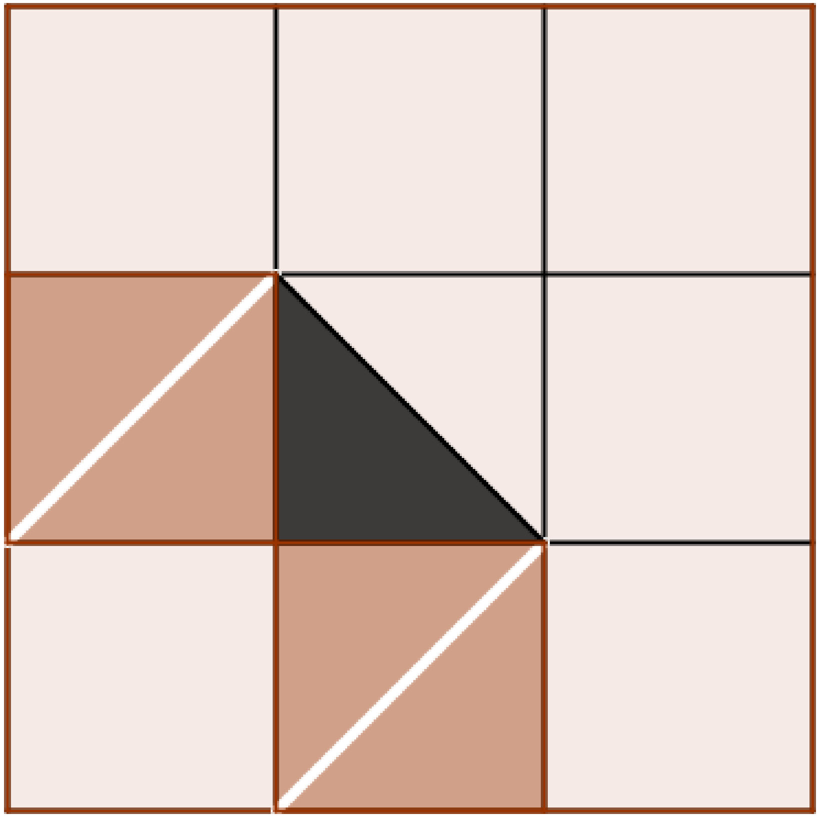
Primo caso di studio: il triangolo rettangolo isoscele.
Si lavora su foglio quadrettato



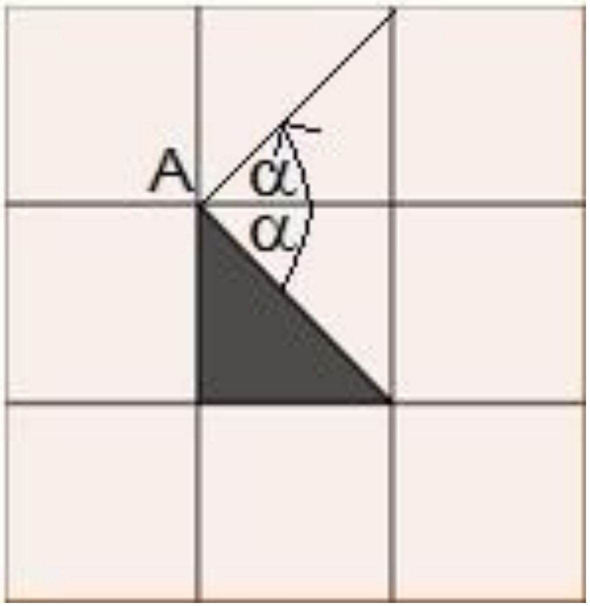
Caso 1 : 1



Caso 1 : 1

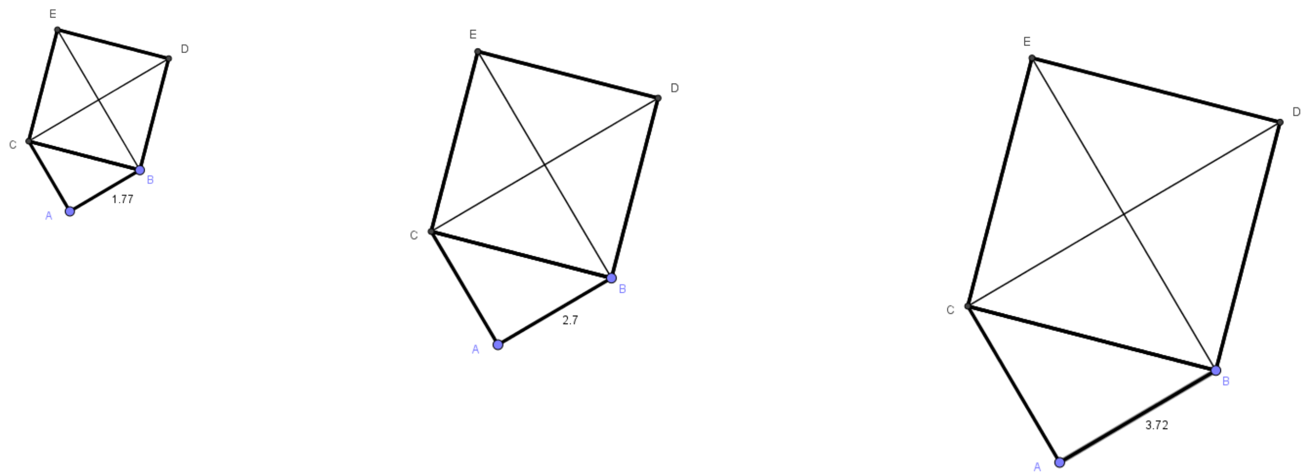


Una idea per fare correttamente il disegno in caso di difficoltà: ruotare intorno ad A tutto il quadrato che contiene la diagonale. La “nuova” diagonale è sicuramente perpendicolare alla precedente.



Ricerca strutture stabili

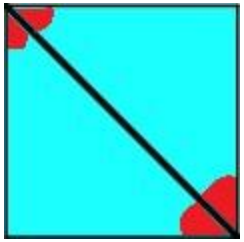
Nel quadrato costruito sull'ipotenusa, al variare dei cateti del triangolo rettangolo isoscele di partenza, si formano sempre altri 4 triangoli uguali . Perché?



Ricerca strutture stabili

Caso 1 : 1

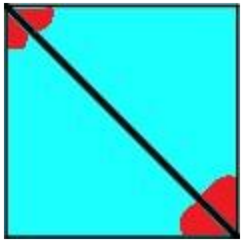
una possibile risposta

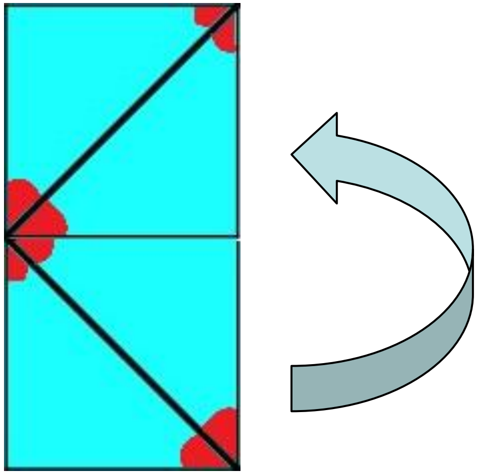


1) Gli angoli rossi
sono complementari

Ricerca strutture stabili
Caso 1 : 1

una possibile risposta

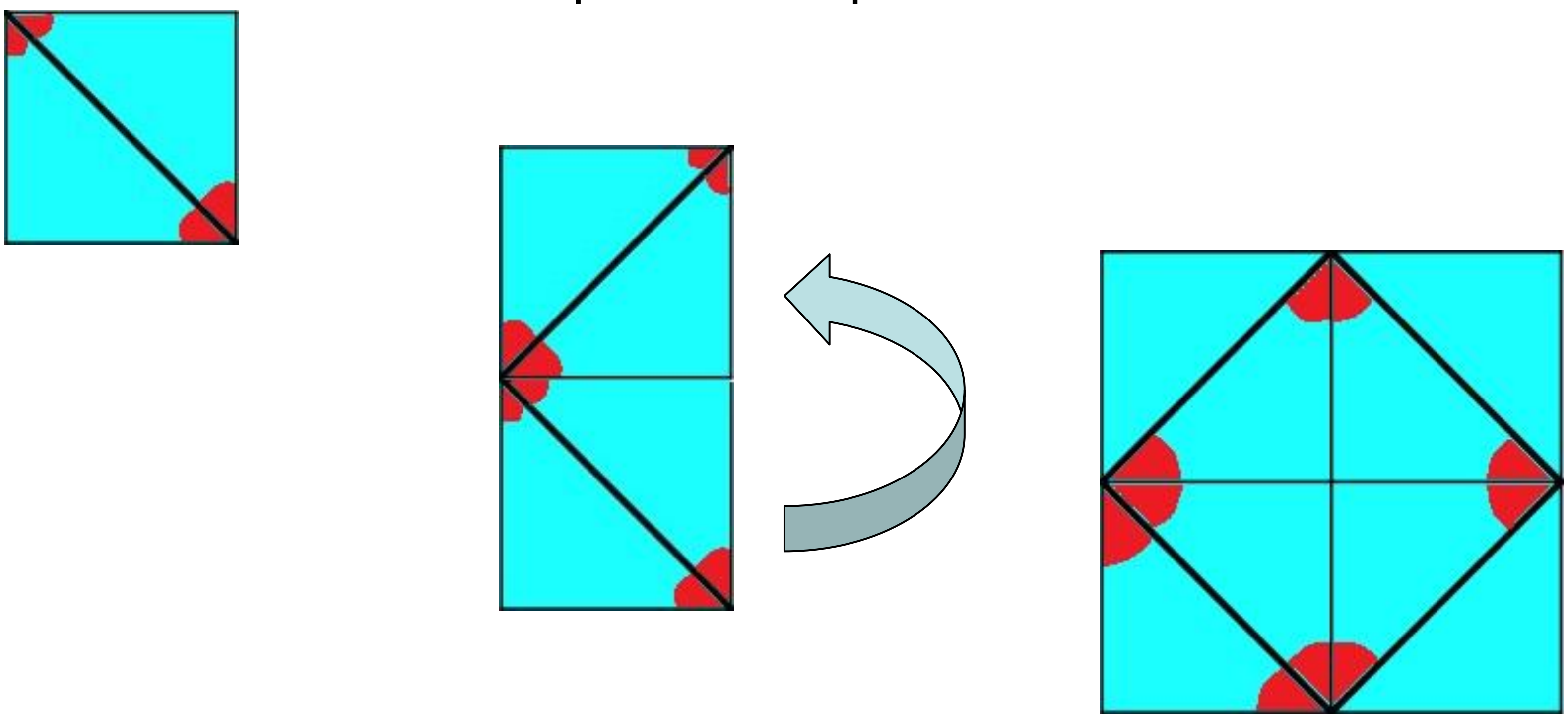




2) Poiché si ruota tutto il quadrato, segue anche l’uguaglianza delle diagonali.

Ricerca strutture stabili
Caso 1 : 1

una possibile risposta



In definitiva si ottiene sicuramente un quadrato (per uguaglianza di lati e di angoli) sempre diviso in 4 triangoli uguali a quello di partenza.

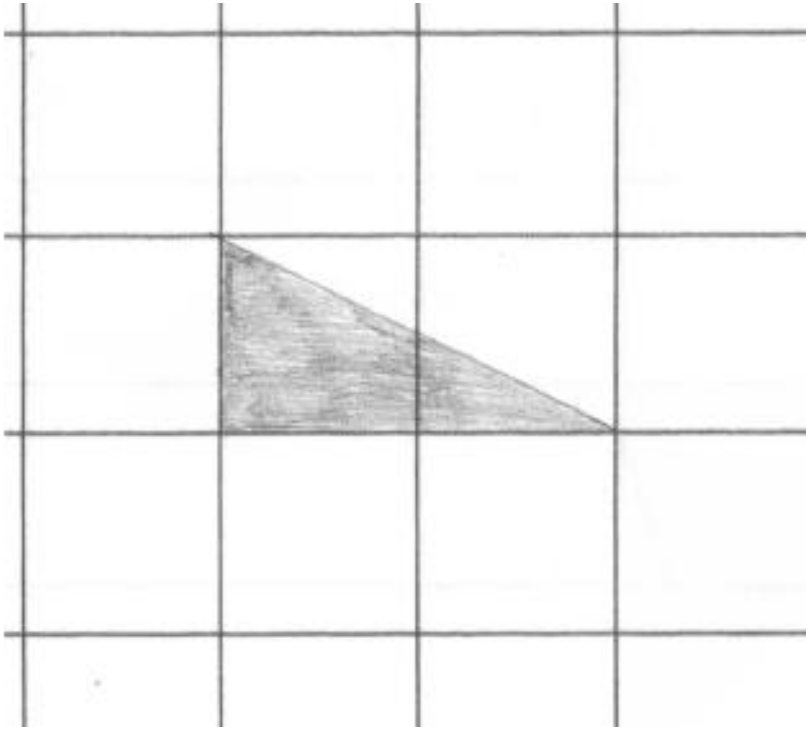
Caso 1 : 1

un esercizio

Dato un quadrato qualsiasi, costruisci quello di area doppia.

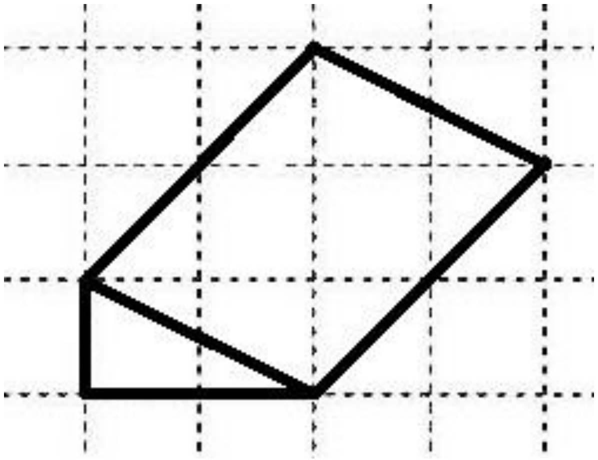
Caso 1 : 2

Si fa disegnare il nuovo caso



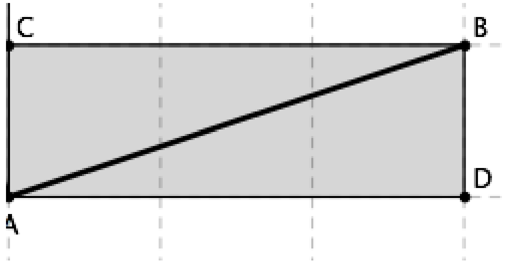
Caso 1 : 2

Errore tipico nel disegno!

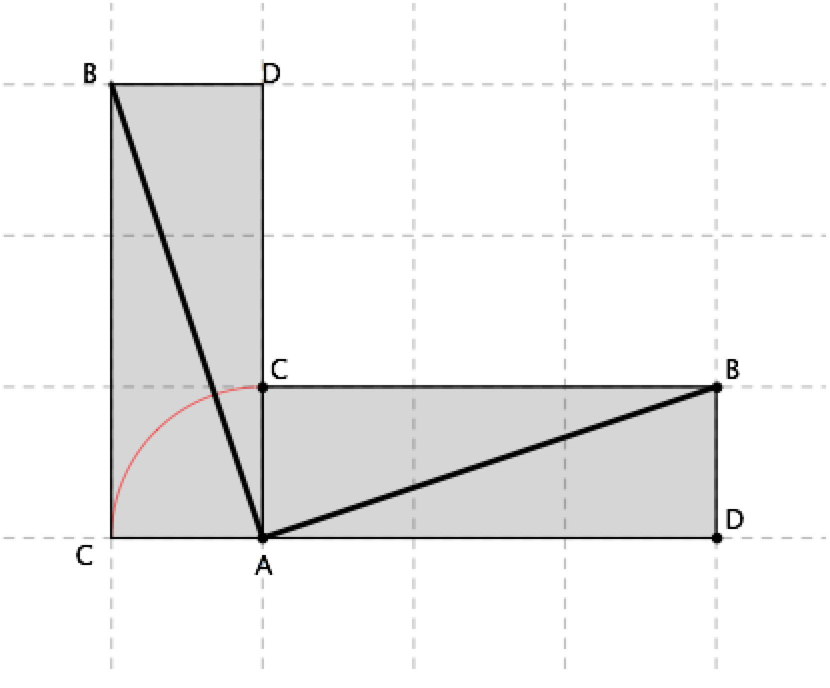


Per questo motivo, l'idea della rotazione di tutto il rettangolo può essere di aiuto per il disegno.

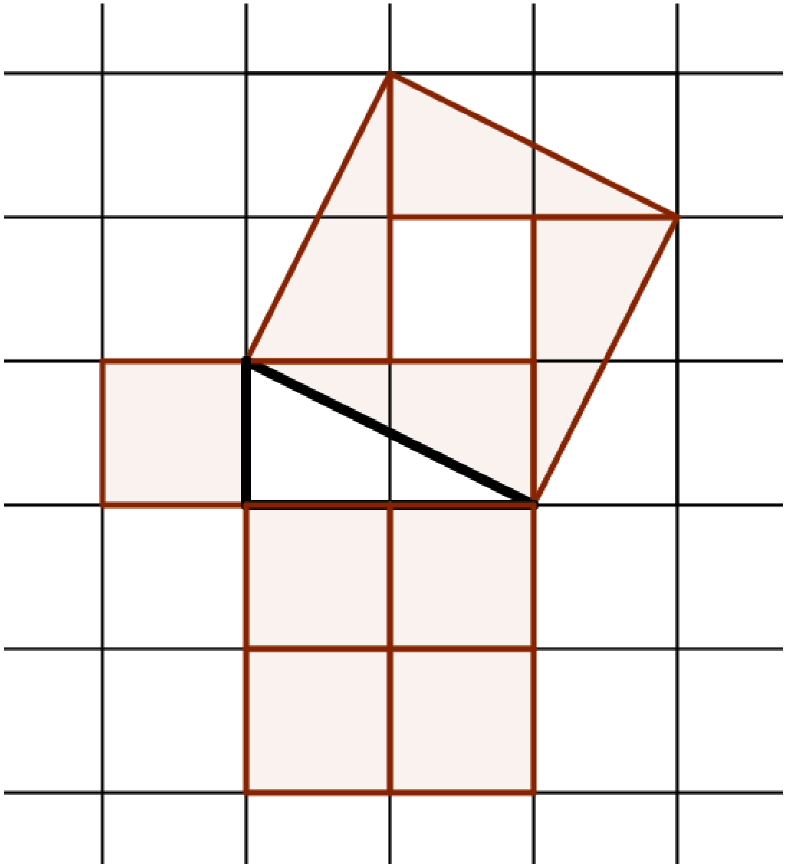
Una idea per il disegno:
la rotazione



Una idea per il disegno:
la rotazione



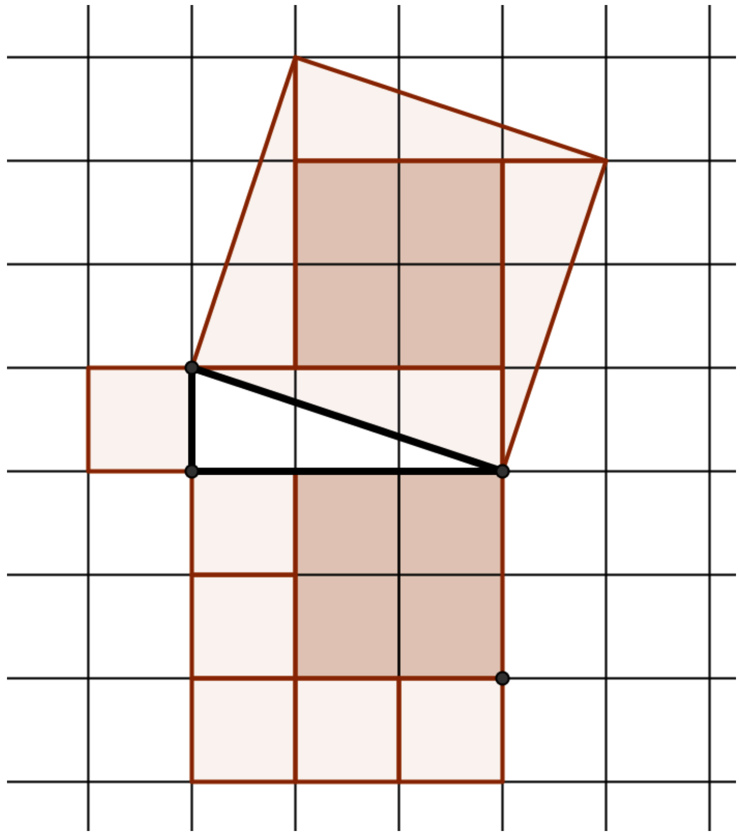
Caso 1 : 2



In questa fase le equivalenze dei quadrati si verificano ancora contando i quadretti.

Invitare ad osservare le figure che si formano nel quadrato sull'ipotenusa.

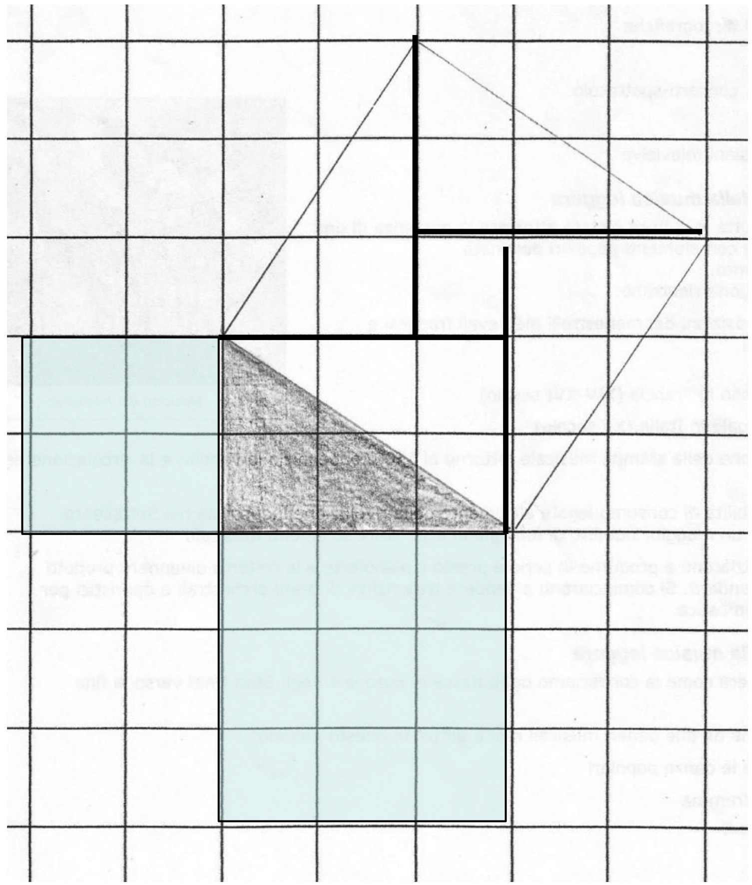
Caso 1 : 3



In questa fase le equivalenze dei quadrati si verificano ancora contando i quadretti.

Invitare ad osservare le figure che si formano nel quadrato sull'ipotenusa.

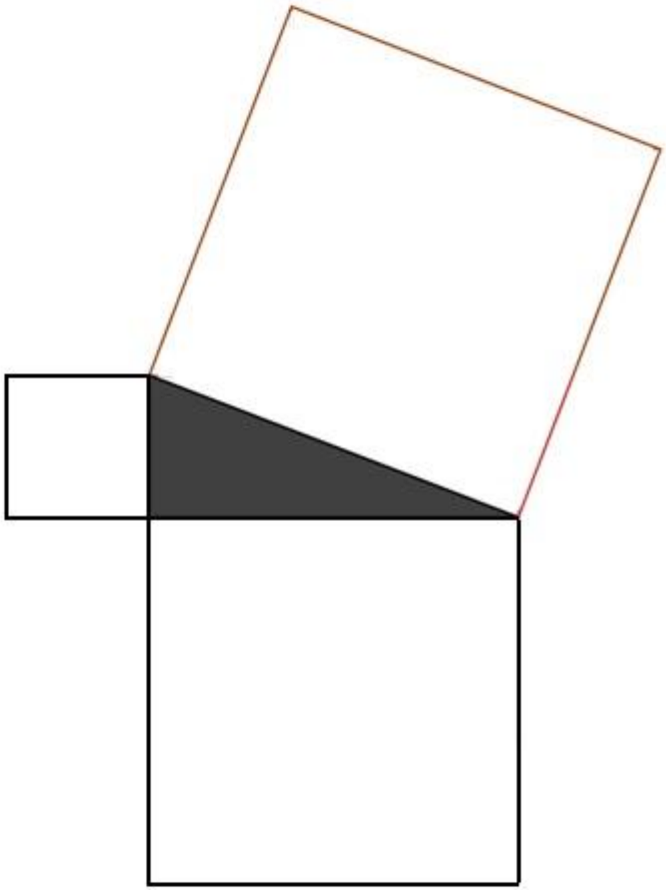
Caso 2 : 3



In questa fase le equivalenze dei quadrati si verificano ancora contando i quadretti.

Invitare ad osservare le figure che si formano nel quadrato sull’ipotenusa.

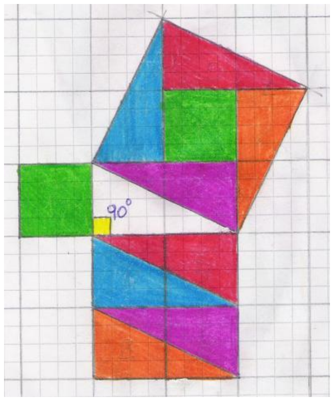
Caso generale

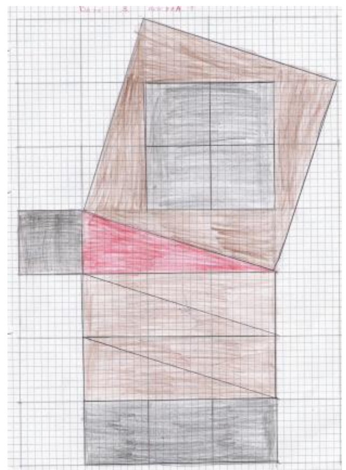


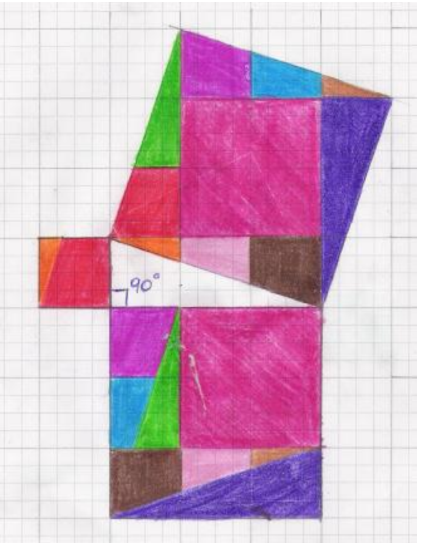
Si consegnano:

Si “riempie” perfettamente
Il quadrato sull’ipotenusa
ma non si riesce a fare
altrettanto con i quadrati costruiti
sui cateti. Come fare?

Lo spunto risolutivo può arrivare anche dagli studenti

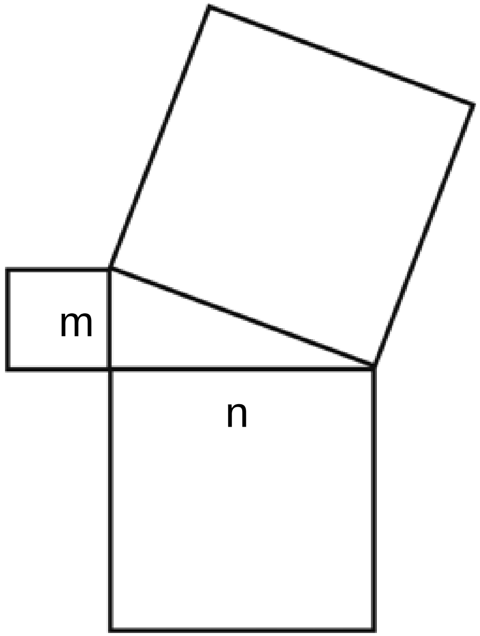


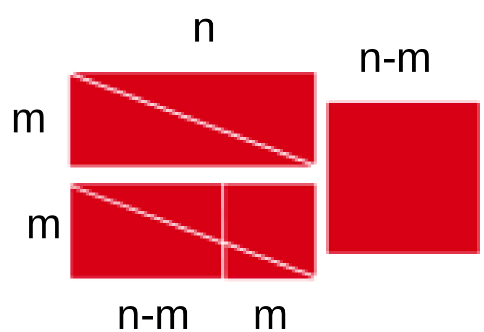




Da questa idea si prende lo spunto per dividere opportunamente 2 dei quattro triangoli consegnati. Si ottengono così 7 poligoni.

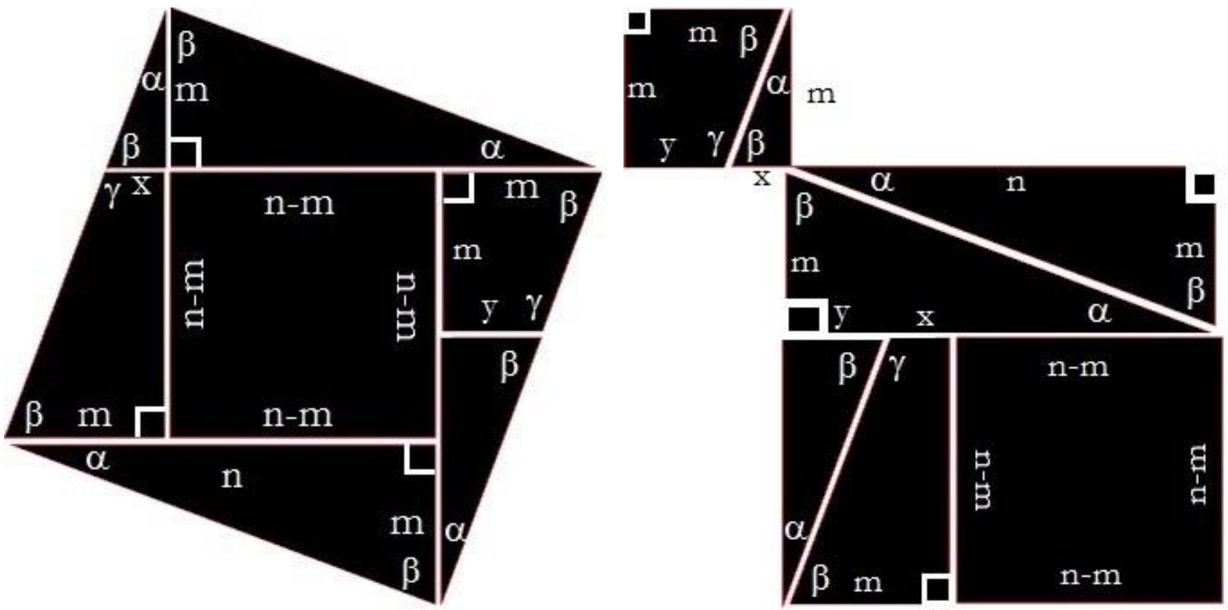
Si risponde alla domanda fatta precedentemente ma avendo ora a disposizione 7 poligoni come in figura.





Una soluzione

Ricerca strutture stabili
caso generale



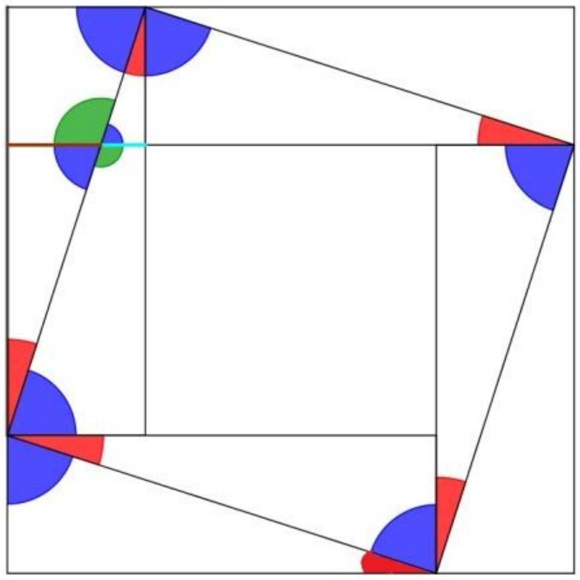
$$\alpha + \beta = 90°$$

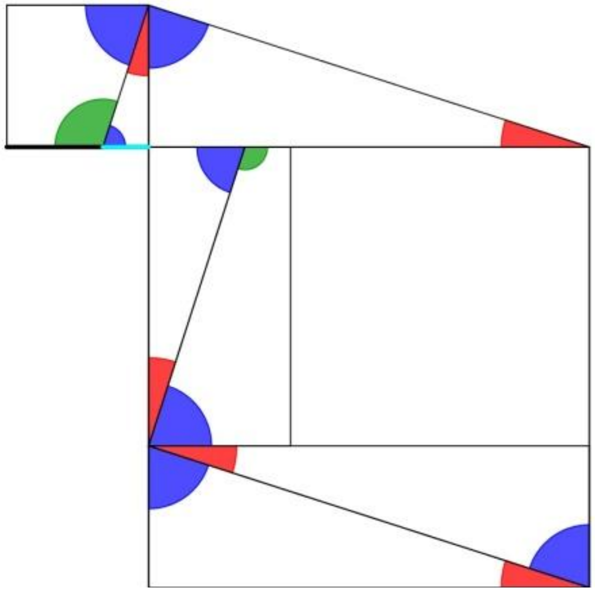
$$\beta + \gamma = 180°$$

$$x + y = m.$$

Ricerca strutture stabili: caso generale

Una proposta didattica: usare colori in luogo di lettere





$$\alpha + \beta = 90°$$

$$\beta + \gamma = 180°$$

$$x + y = m.$$

angolo rosso + angolo blu = 90°

angolo blu + angolo verde = 180°

lato marrone + lato celeste = cateto minore triangolo rettangolo di partenza.

Inverso del t. di Pitagora
Prop. I.48

Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l’angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto.

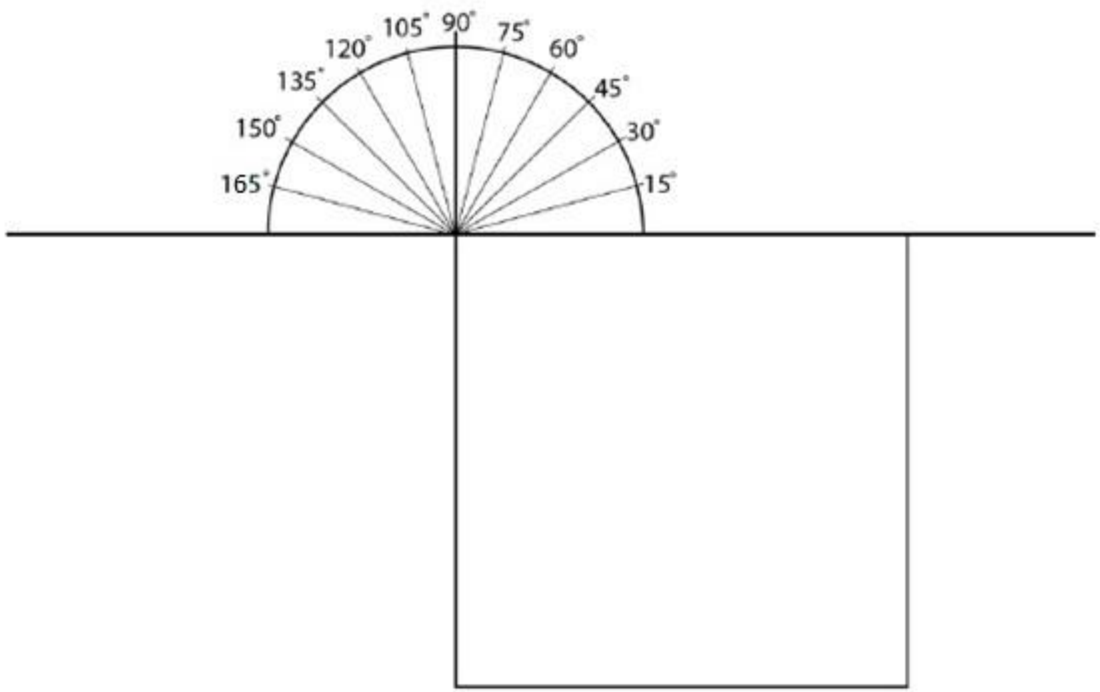
Inverso del t. di Pitagora Prop. I.48

Per assurdo: se l’angolo non è retto, allora è ottuso e si dim. che la somma dei quadrati è minore del quadrato del terzo lato; se è acuto è maggiore. Ciò è contro le ipotesi in entrambi i casi. Allora l’angolo deve essere necessariamente retto.

Per gli adolescenti la dimostrazione per assurdo non è semplice. Allora, in una scuola media si è pensato, per facilitare il ragionamento, a far lavorare gli studenti con il seguente materiale:

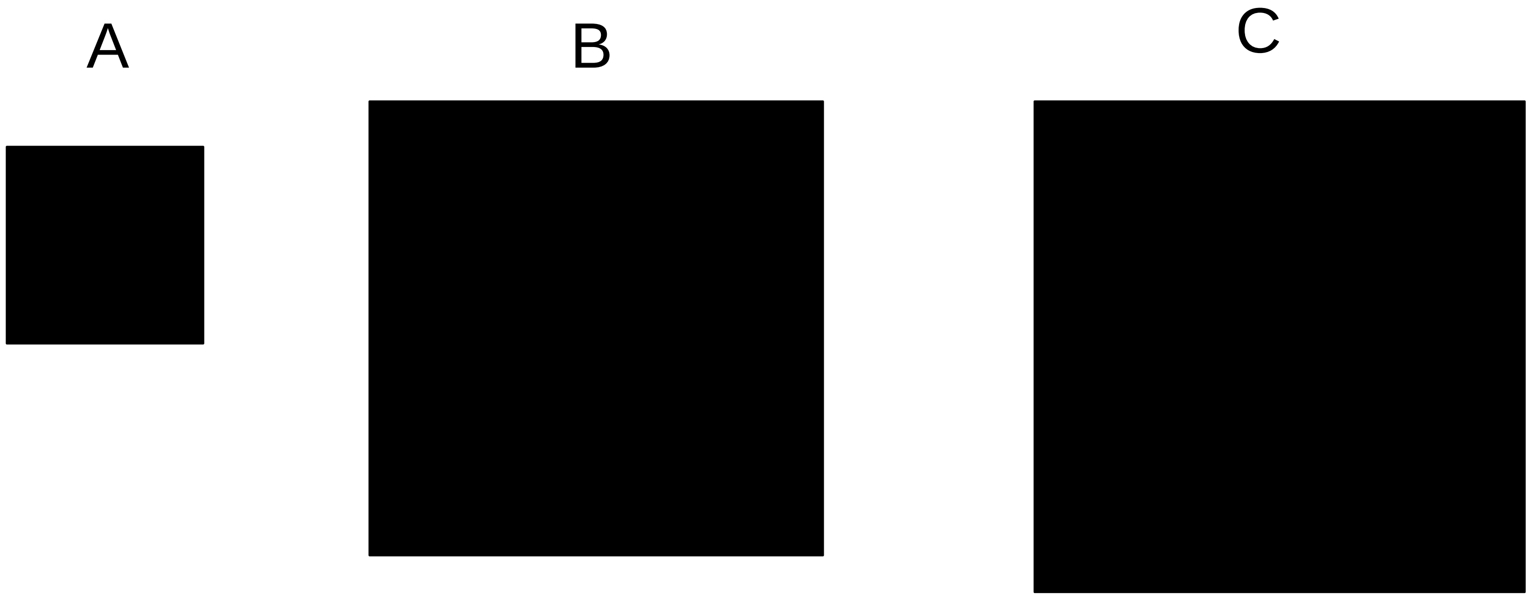
Inverso del t. di Pitagora
Prop. I.48

Si consegna la tavola qui in basso……



Inverso del t. di Pitagora
Prop. I.48

…e i seguenti quadrati



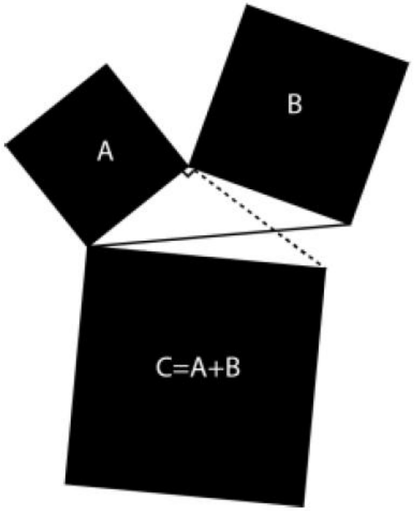
Si noterà che B entra perfettamente nel quadrato disegnato sulla tavola

Inverso del t. di Pitagora
Prop. I.48

Esercizio 1
Usando il teorema di Pitagora verificare che A + B = C.

Esercizio 2
Consideriamo un triangolo con il lato *a uguale al lato del quadrato A e il lato b uguale al lato del quadrato B e sia* α *l'angolo tra i due lati a e b; indichiamo infine con c il terzo lato del triangolo. Usando il goniometro disegnato e i tre quadrati A, B, C riempire la seguente tabella aggiungendo, dove ci sono i puntini, il segno di disuguaglianza corretto.*
Se $\alpha = 15°$ allora c^2 .... $a^2 + b^2$
Se $\alpha = 60°$ allora c^2 .... $a^2 + b^2$
Se $\alpha = 90°$ allora c^2 .... $a^2 + b^2$
Se $\alpha = 105°$ allora c^2 .... $a^2 + b^2$
Se $\alpha = 140°$ allora c^2 .... $a^2 + b^2$

Inverso del t. di Pitagora
Prop. I.48



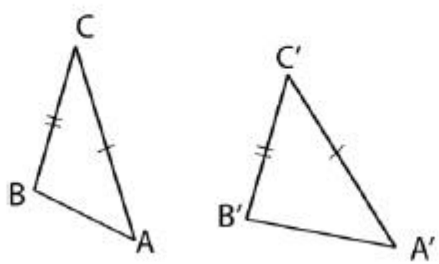
Nei casi presi in esame, se α è ottuso, A + B = $a^2 + b^2$ = C < c^2 . Viceversa se α è acuto, A + B = $a^2 + b^2$ = C > c^2.

Inverso del t. di Pitagora Prop. I.48

Una ipotesi di lavoro proponibile nella scuola sec II grado

- Serve Prop. I.24 come premessa

La proposizione I-24 degli Elementi di Euclide afferma che:
Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati ma l'angolo compreso tra questi due lati è minore nel primi triangolo, allora la base del primo triangolo sarà minore della base del secondo triangolo

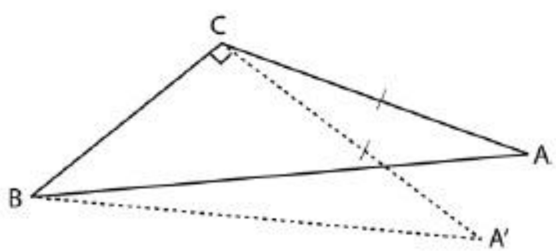


Se BC=B'C' , AC=A'C' , BCA < B'C'A'
allora
AB < A'B'

Inverso del t. di Pitagora Prop. I.48

Nella scuola sec II grado

Usando la proposizione I-24 di Euclide e il teorema di Pitagora dimostrare che in un triangolo con un angolo ottuso, il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo ottuso è maggiore della somma dei quadrati costruiti sui rimanenti due angoli.



Sia l'angolo in C ottuso. Da C tracciamo la retta CA' perpendicolare a BC e su questa retta prendiamo un punto A' in modo che

CA=CA'.

Poiché l'angolo BCA' è retto abbiamo

$BC^2 + A'C^2 = A'B^2$ ma A'C= BC quindi il quadrato su A'B è la somma dei quadrati su BC e AC. Ma AB>A'B dato che questi due segmenti sono le basi di due triangoli BCA' e BCA che hanno i lati che comprendono l'angolo in C uguali ma l'angolo BCA è maggiore di BCA' essendo l'uno ottuso e l'altro retto,

Inverso del t. di Pitagora
Prop. I.48

Nella scuola sec II grado

La dimostrazione è stata riportata perché formalizza l’esperimento realizzato concretamente nell’attività precedente.

Lo spunto per realizzare un’attività empirica che agevoli una corretta costruzione del pensiero viene (come speso accade) dallo studio degli Elementi di Euclide.