

# Le quadratura dei poligoni

Libro I

Elementi di Euclide

In matematica occorre porre **problematiche iniziali** che siano

- vere, credibili, verosimili, possibili.....,
- vicine, quanto più possibile, alle conoscenze, curiosità, capacità degli studenti, al “vissuto” dei ragazzi
- che portino con se “valori culturali” (storia, grandi personaggi del passato)
- che siano cognitivamente significative, aiutino a rimuovere “ostacoli” cognitivi

# Esempi

**Un obiettivo: come si può stimare la superficie di una piazza?**



# Esempi

Un obiettivo: come si può stimare la superficie di una regione?



# Esempi

**Un obiettivo: come si può stimare la superficie di un continente?**





# Esempio di problema cosiddetto “reale”

## MCD

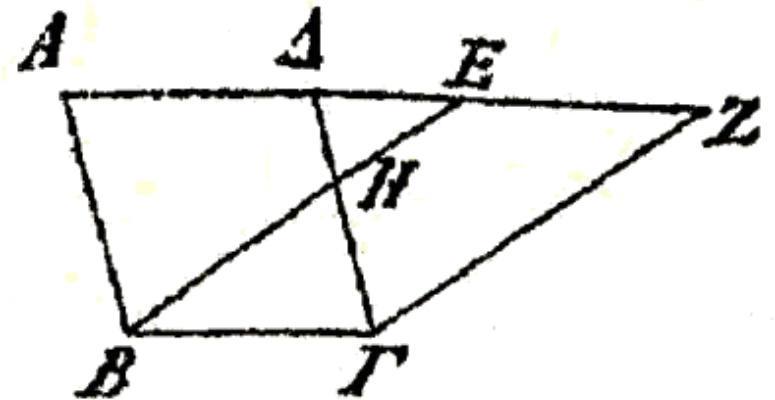
11. Giovanni ha acquistato per le ragazze della sua scuola la bellezza di 1476 rose rosse e 984 rose bianche e deve suddividerle in mazzetti di uguale composizione. Quanti mazzetti otterrà e quale la loro composizione? (Sapresti applicare il metodo di Euclide a questo problema...)

E' “reale”?

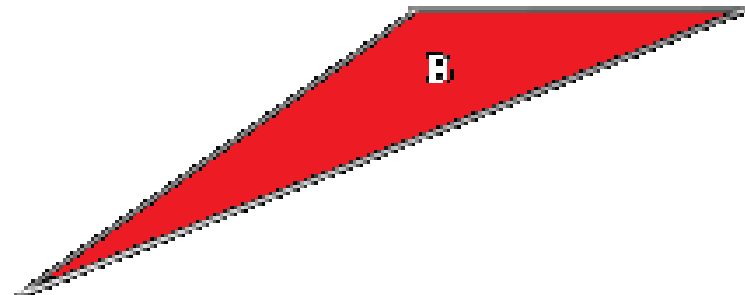
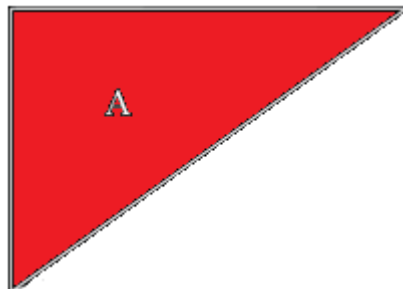
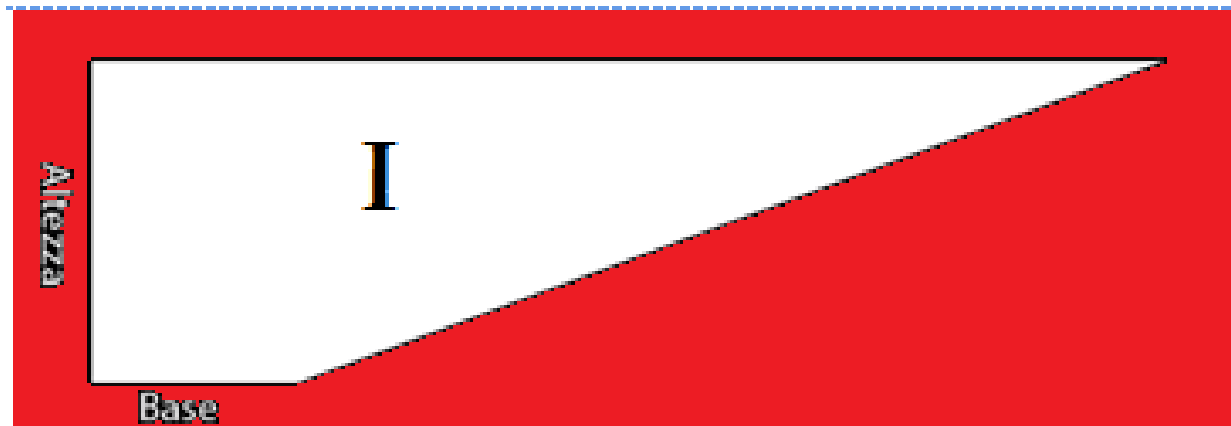
# Idea alla base delle quadrature

La proposizione I.35 degli Elementi:  
"raddrizzare" un parallelogramma in un  
rettangolo equivalente mediante una  
equivalenza in moto.

*i parallelogrammi costituiti nella  
medesima base e nelle medesime  
parallele, sono fra loro uguali (si  
legga equivalenti).*



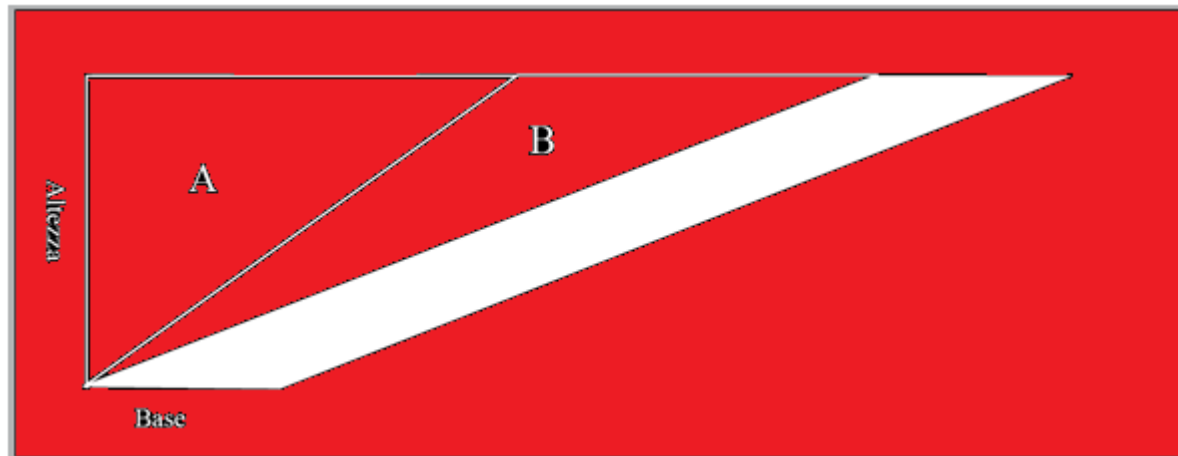
# Materiale consegnato ai ragazzi



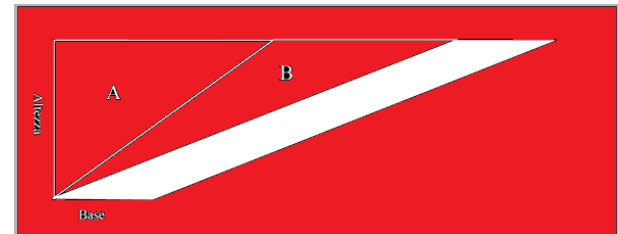


**Inserire i triangoli in modo opportuno per far  
si che il poligono differenza  $I - (A+B)$  sia  
sempre un parallelogramma**

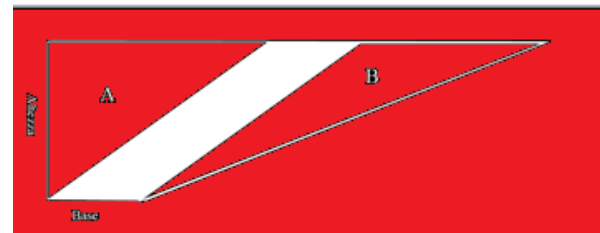
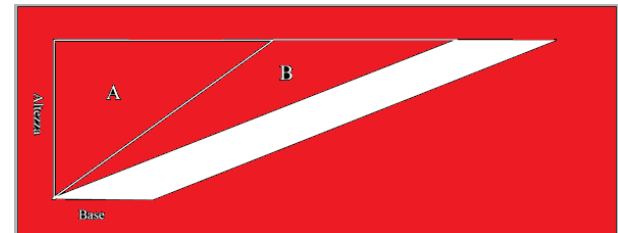
Inserire i triangoli in modo opportuno per far  
si che il poligono differenza  $I - (A+B)$  sia  
sempre un parallelogramma



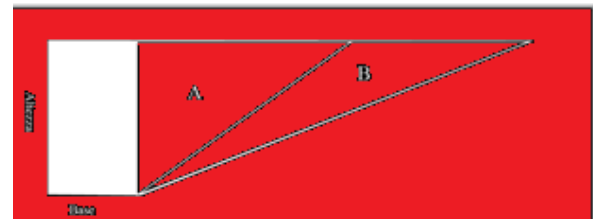
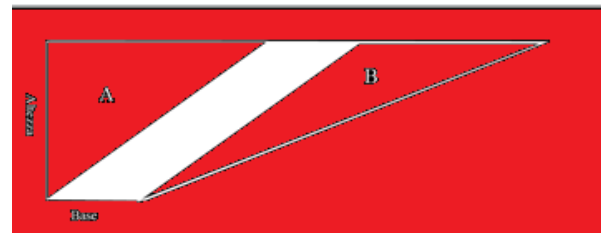
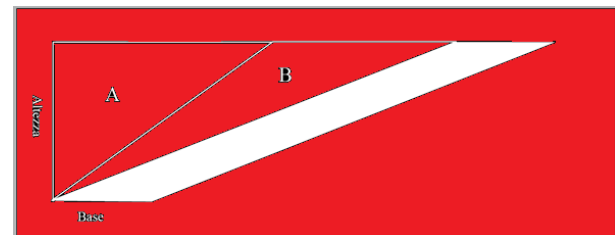
soluzione.....



soluzione.....

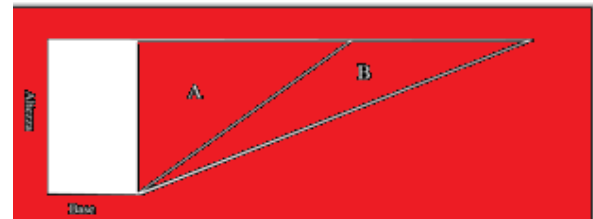
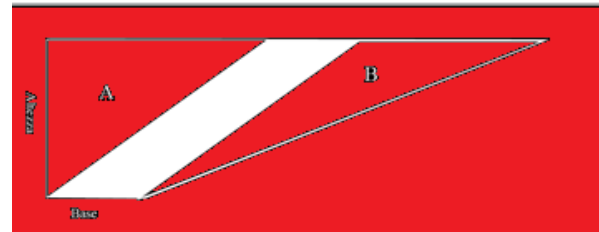
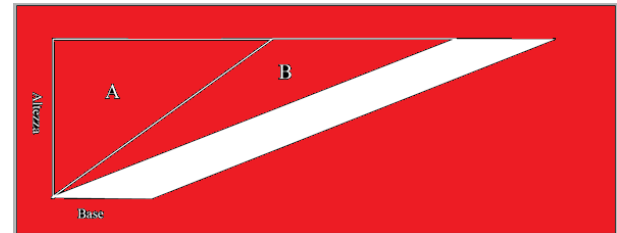


soluzione.....



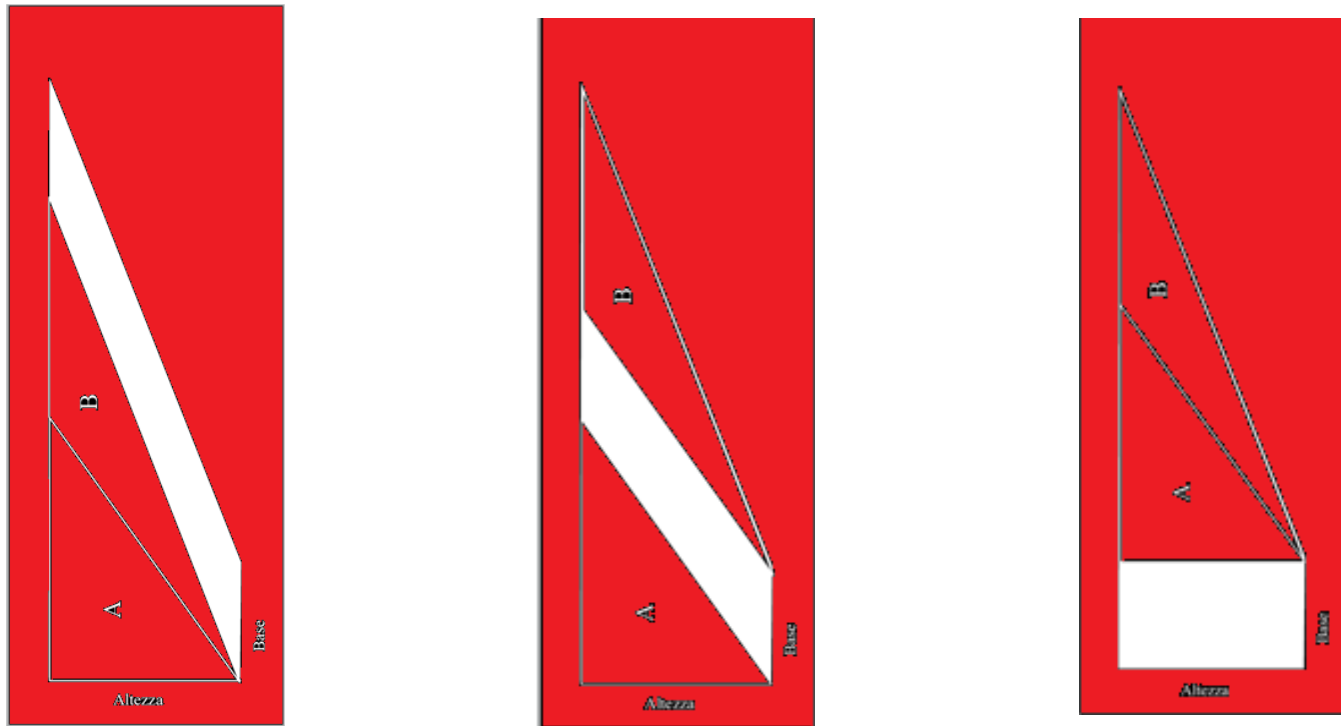
soluzione.....

- 1) Cosa hanno in comune i parallelogrammi?
- 2) Come sono tra di loro le loro aree?



Il primo parallelogramma è stato “raddrizzato” in un rettangolo equivalente di cui è facile calcolarne l’area!!!!

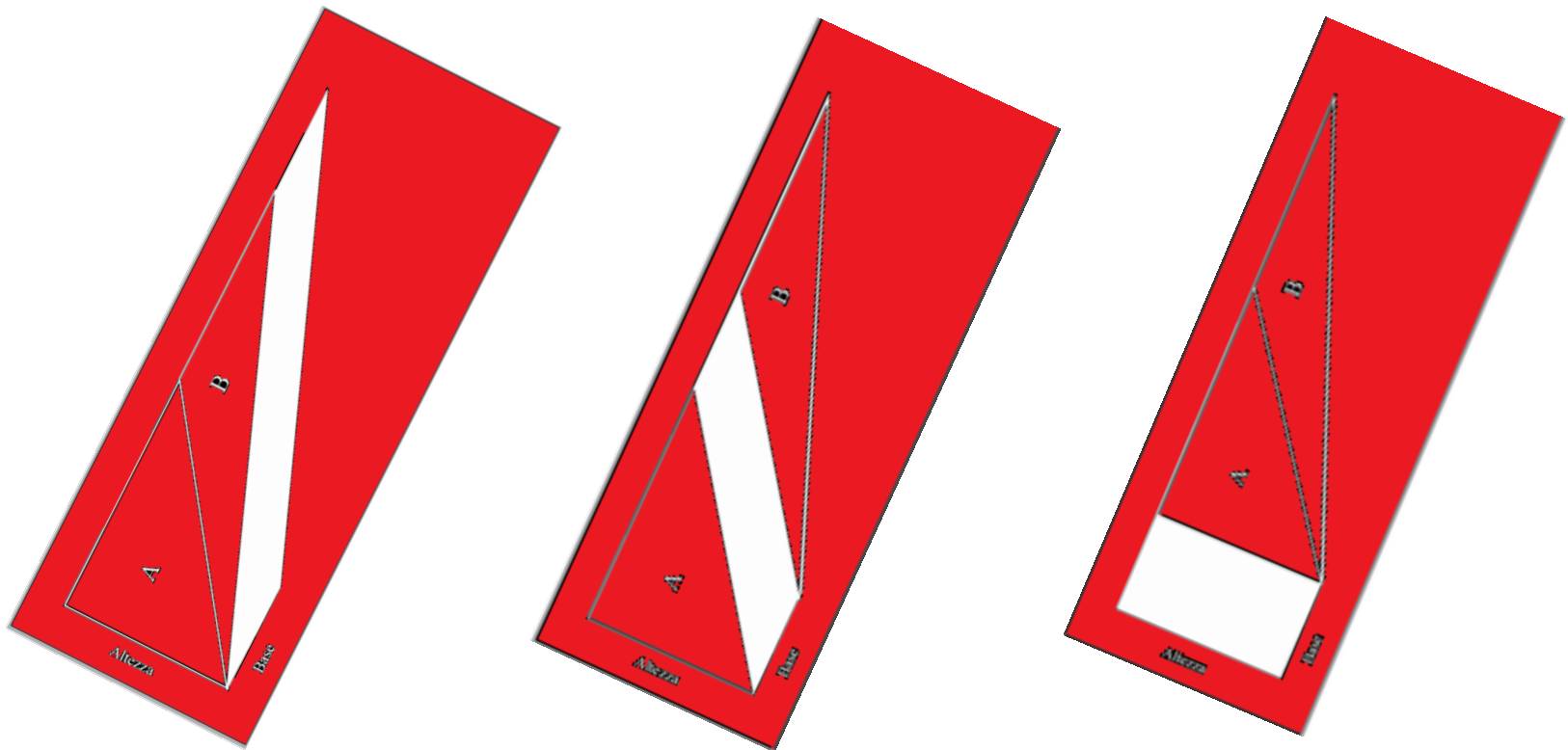
Naturalmente il tutto continua ad essere vero per..



Il primo parallelogramma è stato “raddrizzato” in un rettangolo equivalente di cui è facile calcolarne l’area!!!!



Naturalmente il tutto continua ad essere vero per..



Il primo parallelogramma è stato “raddrizzato” in un rettangolo equivalente di cui è facile calcolarne l’area!!!!

I parallelogrammi “bianchi”  
sono tutti diversi l’uno dall’altro  
ma equivalenti per la NC 3.

**Quindi la loro area si deduce da quella del  
rettangolo che è semplice da calcolare.**

Evidenziare le strutture stabili  
dei parallelogrammi

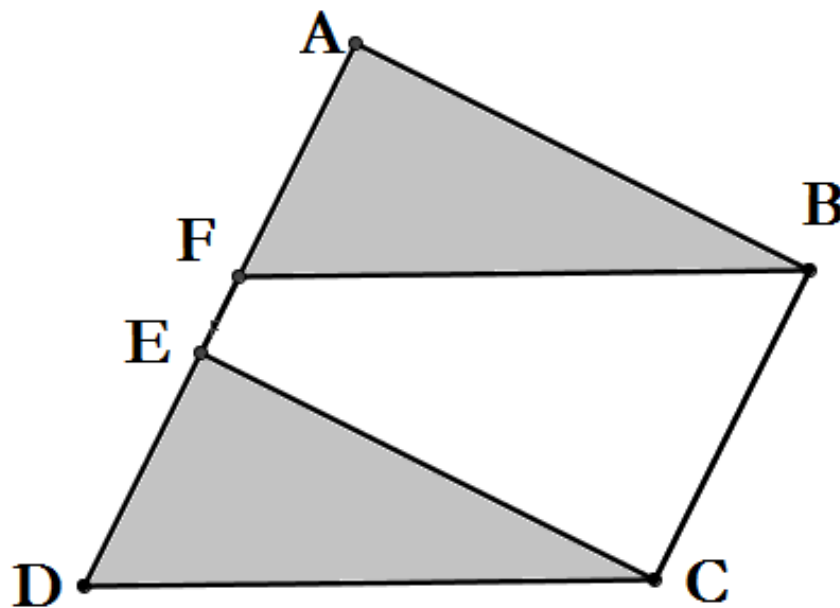
Avviare un primo processo di generalizzazione  
Far scrivere l'enunciato  
della proposizione I.35.

- Usare : poche parole significative
  - nomi e frasi ideati dagli studenti
- far “imparare” tanto da saper ripetere

Somministrare esercizi di difficoltà sempre maggiori  
che permettano di capire se i passi fondanti della  
attività siano stati compresi:

- Casi in cui si giunge alla soluzione mediante quanto  
appreso ([Esercizi di tipo A: Esercizio 1](#))

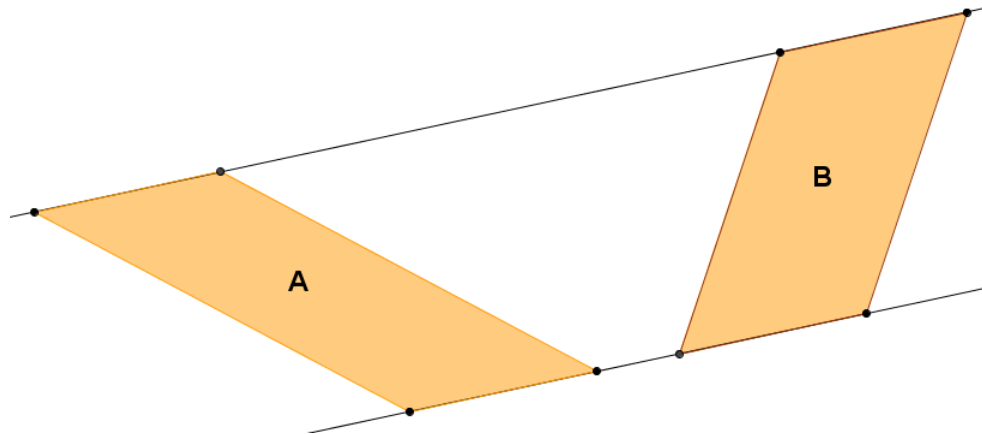
**Esercizio 1.** Perché i due triangoli grigi contenuti nel trapezio  $ABCD$  sono sicuramente equivalenti? Motiva la tua risposta.



Somministrare esercizi di difficoltà sempre maggiori che permettano di capire se i passi fondanti della attività siano stati compresi:

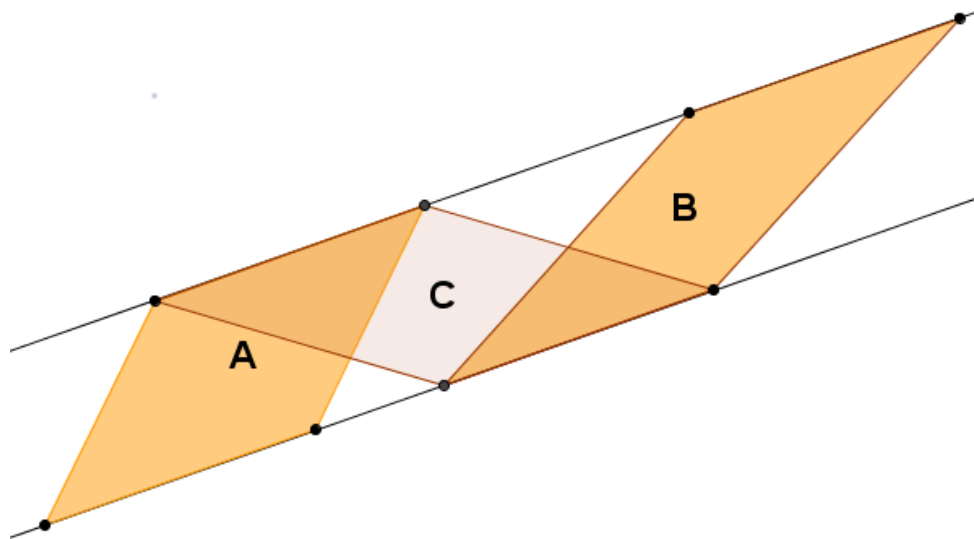
- Casi in cui si giunge alla soluzione mediante quanto appreso ([tipo A, Esercizio 1](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 2](#))

**Esercizio 2.** I due parallelogrammi A e B della figura qui a lato hanno le basi della stessa lunghezza. Spiega perché hanno sicuramente la stessa area.



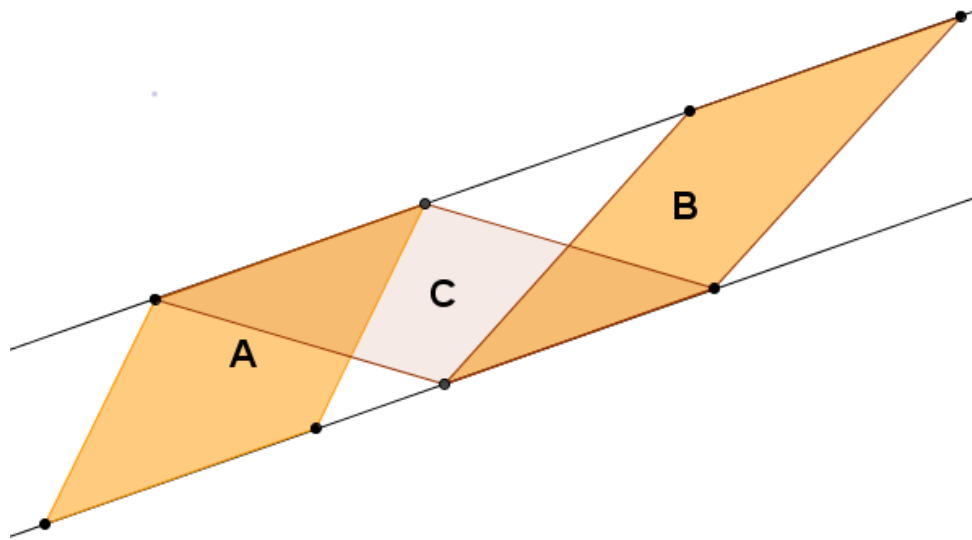


**Esercizio 2.** I due parallelogrammi A e B della figura qui a lato hanno le basi della stessa lunghezza. Spiega perché hanno sicuramente la stessa area.



A è equivalente a C e C è eq. B per I.35; poi per NC 1 segue che A eq. B.

**Far enunciare e trascrivere il risultato scoperto**



# Osservazione

Non usare altre motivazioni al di fuori del quadro teorico

Es. Se si dovesse affermare:

*i parallelogrammi sono equivalenti perché hanno stessa base e stessa altezza!*

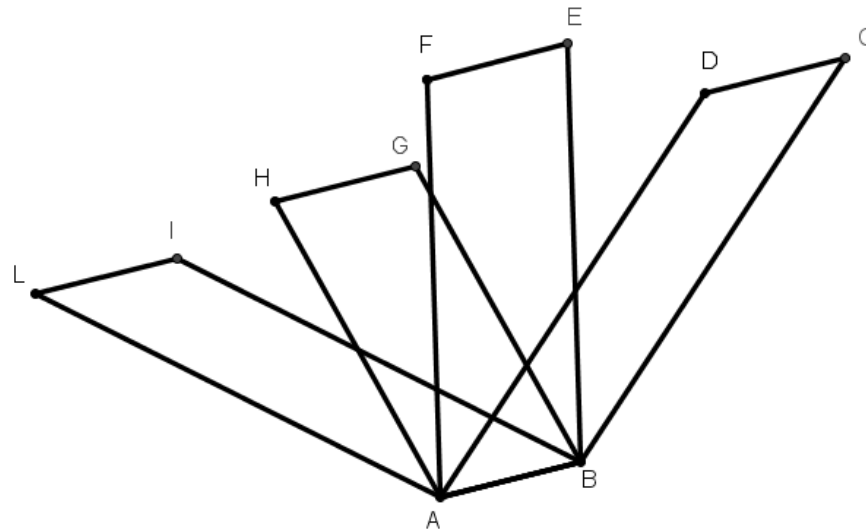
Far notare che l'altezza non è stata mai utilizzata fin d'ora.

Quindi non si può usare tale argomento!

Somministrare esercizi con difficoltà diverse e maggiori che permettano di capire se i passi fondanti della attività siano stati compresi:

- Casi in cui si giunge alla soluzione mediante quanto appreso ([tipo A, Esercizio 1](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 2](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 3](#))

**Esercizio 3** Quali tra i parallelogrammi  $ABCD$ ,  $ABEF$ ,  $ABGH$ ,  $ABIL$  sono tra di loro equivalenti? Motiva la risposta.



I parallelogrammi hanno la stessa base ma non sono tutti racchiusi tra due stesse parallele

**Cosa si conclude per quelli non racchiusi tra le stesse parallele?**

# Un po' di logica...

Le negazioni creano sempre qualche problema cognitivo!

1)                      Se A                                            B

ma se non vale A, nulla si può concludere su B

2)                      se valgono contemporaneamente                      A e B                                            C

ma se non vale o A o B o entrambi, nulla si può concludere su c.

# Un po' di logica...

Nel nostro caso lo schema è:

Se vale a) i parallelogrammi stanno nelle stesse parallele  
e vale b) i parallelogrammi hanno la stessa base  
allora vale c) i parallelogrammi sono equivalenti

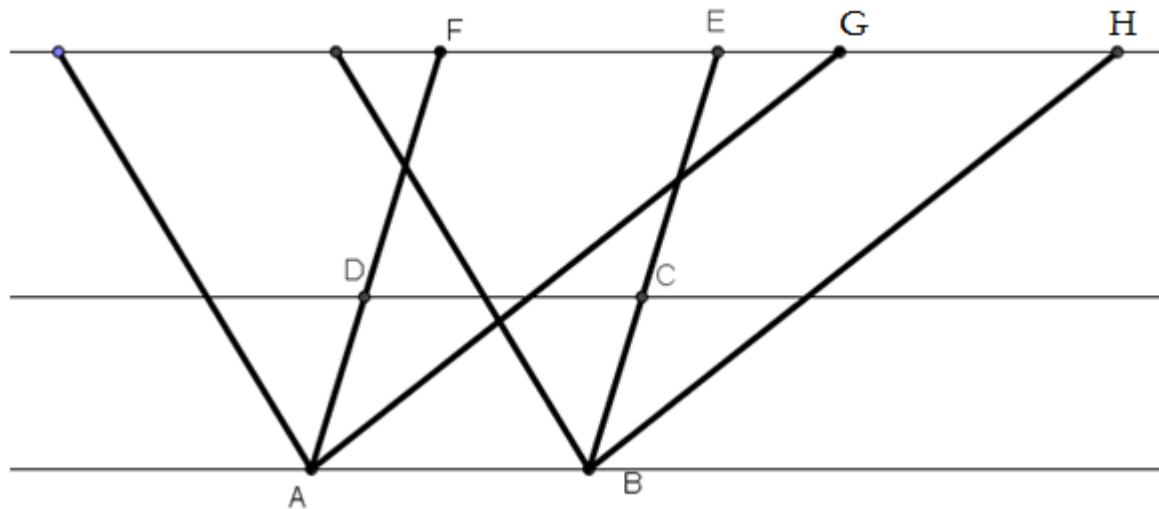
E se non valesse a) cioè non stessero nelle stesse parallele? Nulla si può concludere...

E se non valesse b)? Cioè non avessero la stessa base? Nulla si può concludere...



Se cadesse una delle due ipotesi?

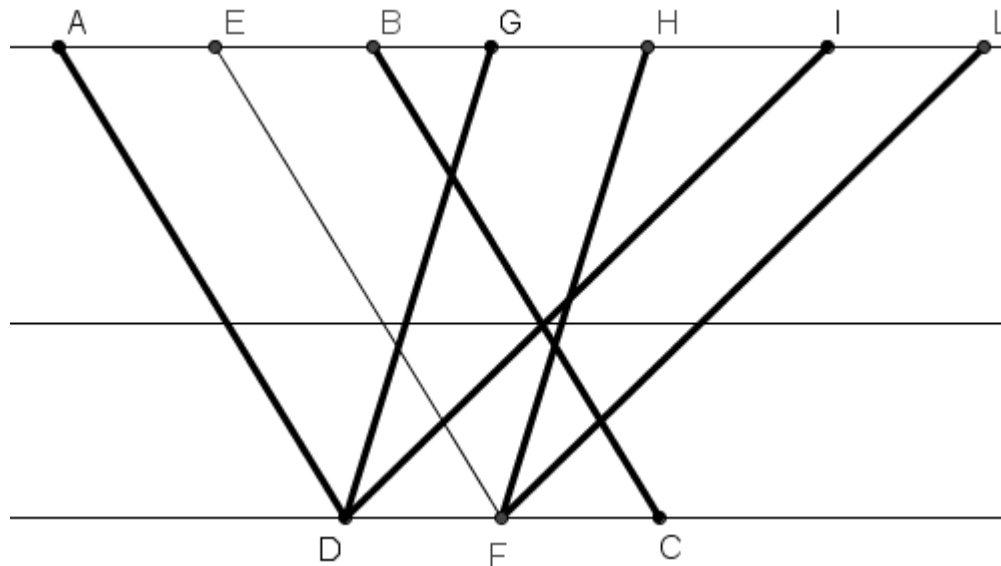
I parallelogrammi ABCD e ABHG hanno la stessa base ma non sono più racchiusi tra due stesse parallele



Si «usa» il parallelogramma «ausiliario» ABEF  
 $A(ABCD) < A(ABEF) = A(ABHG)$

## Se cadesse una delle due ipotesi?

I parallelogrammi ILFD e ABCD non hanno la stessa base ma sono racchiusi tra le stesse parallele



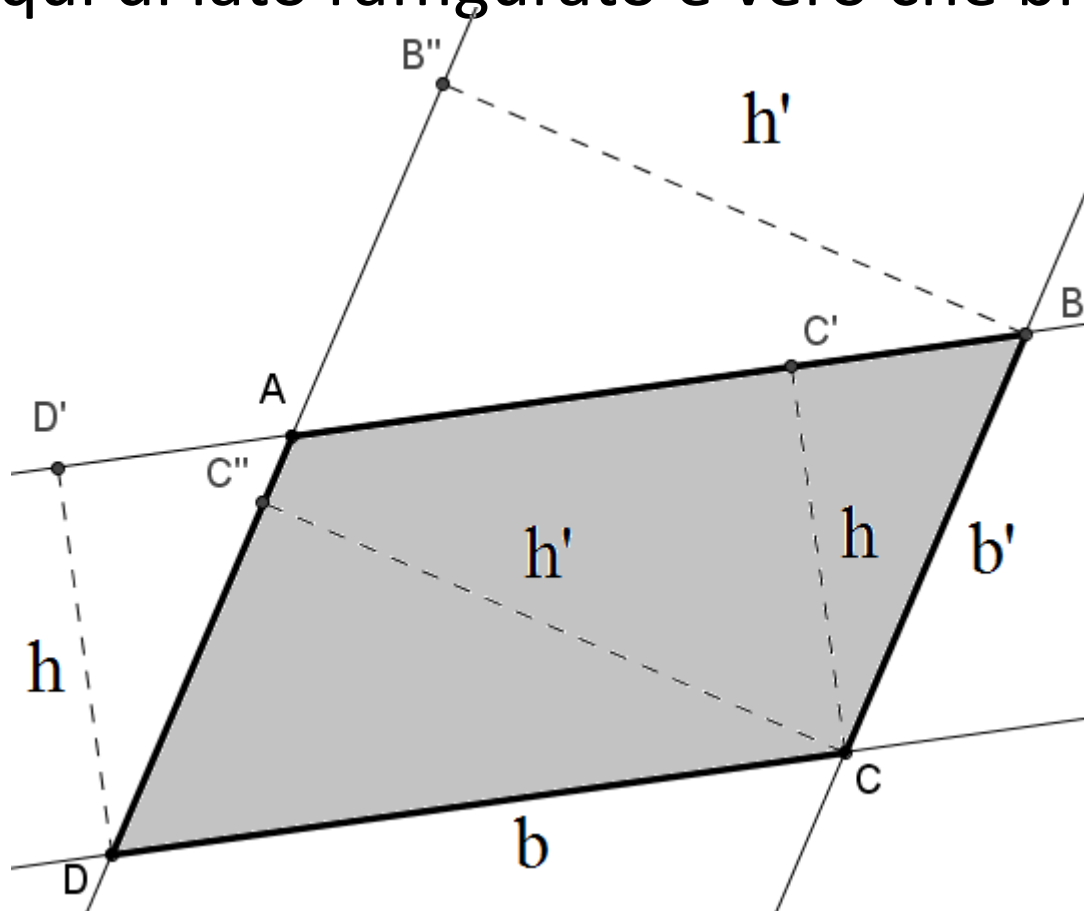
Si «usa» il parallelogramma «ausiliario» AEFD

$$A(ILFD) = A(AEFD) < A(ABCD)$$

Somministrare esercizi con difficoltà diverse e maggiori che permettano di capire se i passi fondanti della attività siano stati compresi:

- Casi in cui si giunge alla soluzione mediante quanto appreso ([tipo A, Esercizio 1](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 2](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 3](#))
- Casi con un “salto”, una visione o creazione particolare ([tipo C, Esercizio 4](#))

**Esercizio 4.** Spiegare perché nel parallelogramma ABCD qui di lato raffigurato è vero che  $bh = b'h'$ .



$$A(ABCD) = A(CDD'C') = bh$$

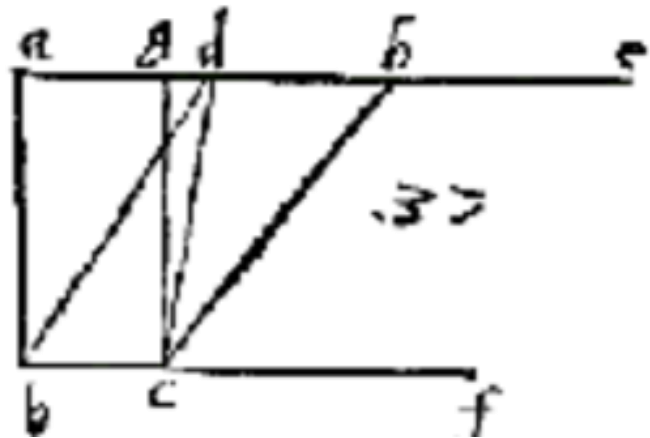
$$A(ABCD) = A(CC''B''B) = b'h'$$

$$\text{quindi } A(ABCD) = bh = b'h'$$

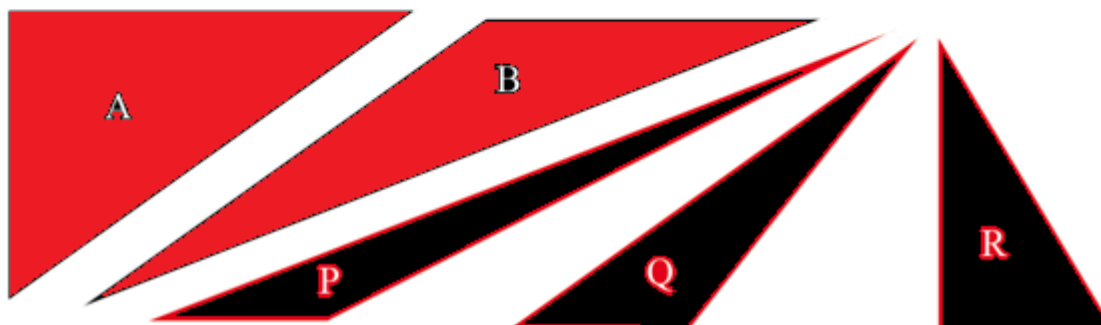
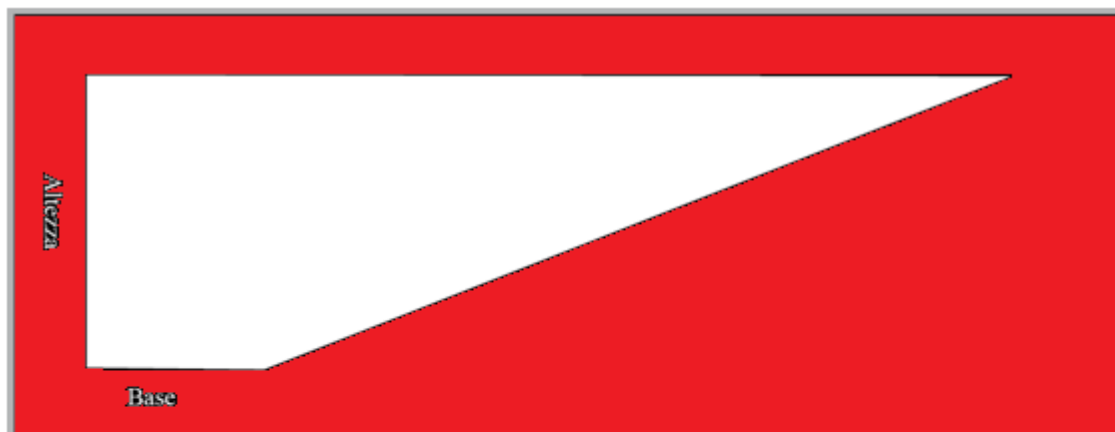
La proposizione I.37 degli Elementi:  
"raddrizzare" un qualsiasi triangolo in un  
triangolo rettangolo equivalente mediante  
una equivalenza in moto.

.

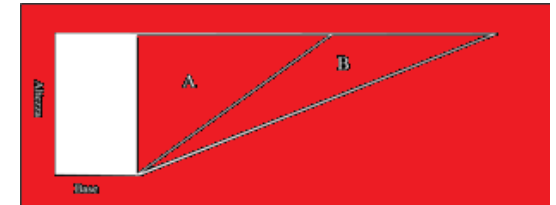
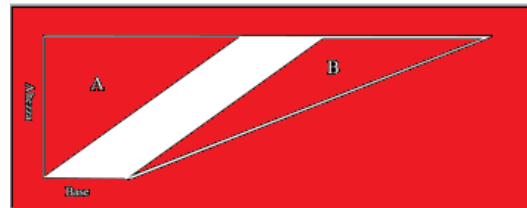
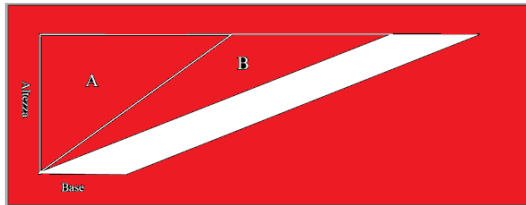
*i triangoli costituiti nella  
medesima base e nelle  
medesime parallele,  
sono fra loro uguali*



# Materiale consegnato



Ripartire da:

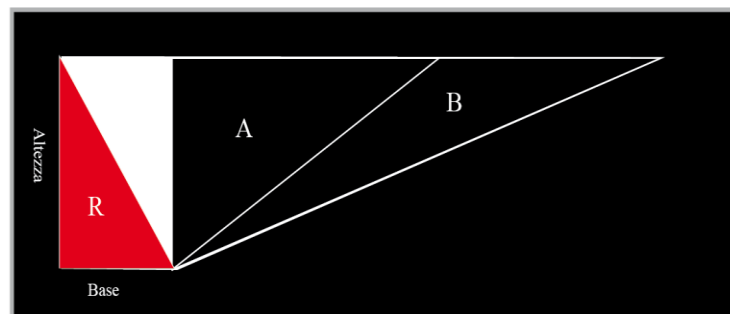
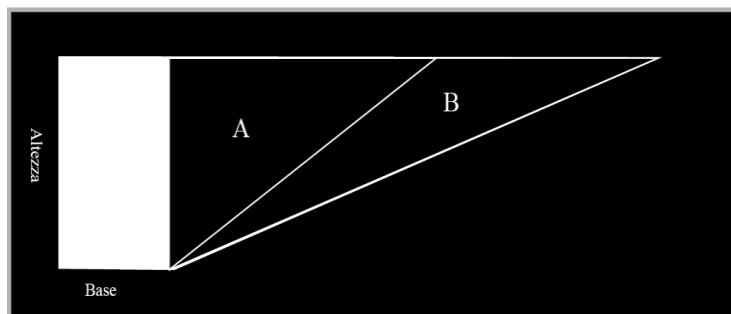
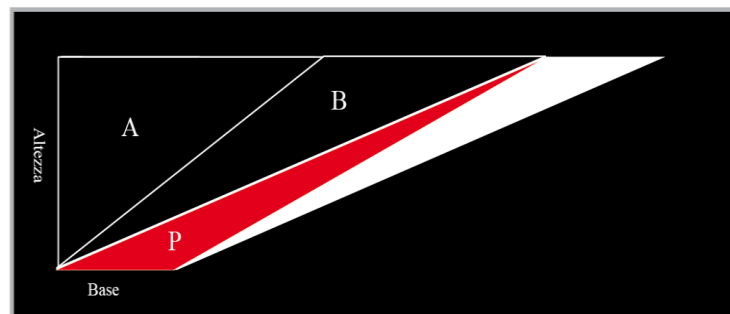
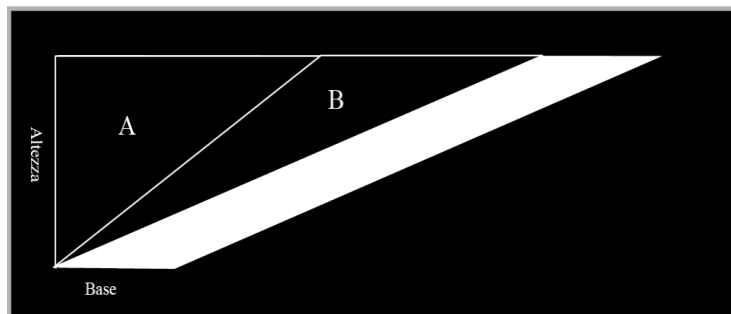
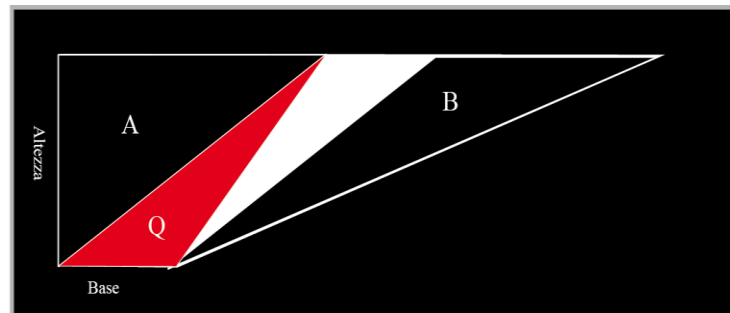
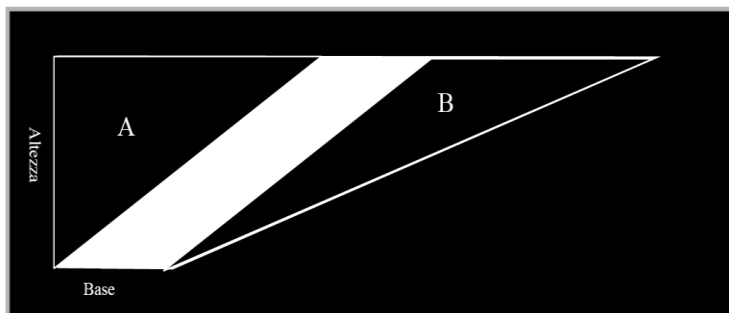


In ciascuna delle tre disposizioni, inserire il triangolo nero opportuno;

cosa si può concludere sulle aree dei tre triangoli neri?

Sono equivalenti!!!





Nota: in questo disegno i colori sono invertiti rispetto ai disegni precedenti