

Le quadratura dei poligoni

Libro I
Elementi di Euclide

In matematica occorre porre **problematiche iniziali** che siano

- vere, credibili, verosimili, possibili.....,
- vicine, quanto più possibile, alle conoscenze, curiosità, capacità degli studenti, al “vissuto” dei ragazzi
- che portino con se “valori culturali” (storia, grandi personaggi del passato)
- che siano cognitivamente significative, aiutino a rimuovere “ostacoli” cognitivi

Esempi

Un obiettivo: come si può stimare la superficie di una piazza?



Esempi

Un obiettivo: come si può stimare la superficie di una regione?



Esempi

Un obiettivo: come si può stimare la superficie di un continente?



Esempio di problema cosiddetto “reale”

MCD

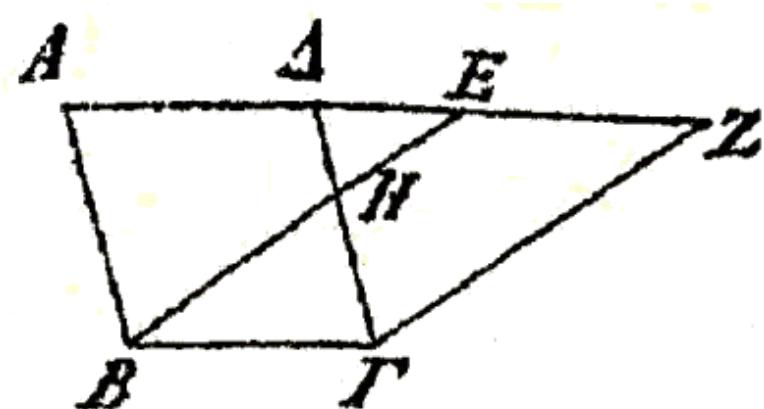
11. Giovanni ha acquistato per le ragazze della sua scuola la bellezza di 1476 rose rosse e 984 rose bianche e deve suddividerle in mazzetti di uguale composizione. Quanti mazzetti otterrà e quale la loro composizione? (Sapresti applicare il metodo di Euclide a questo problema...)

E’ “reale”?

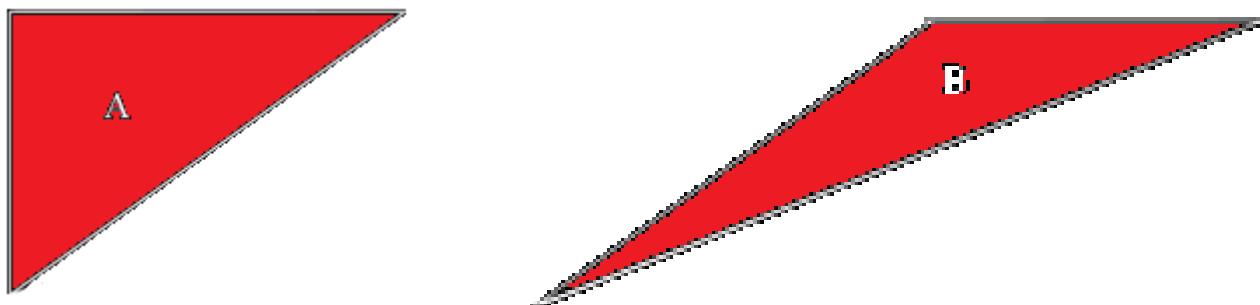
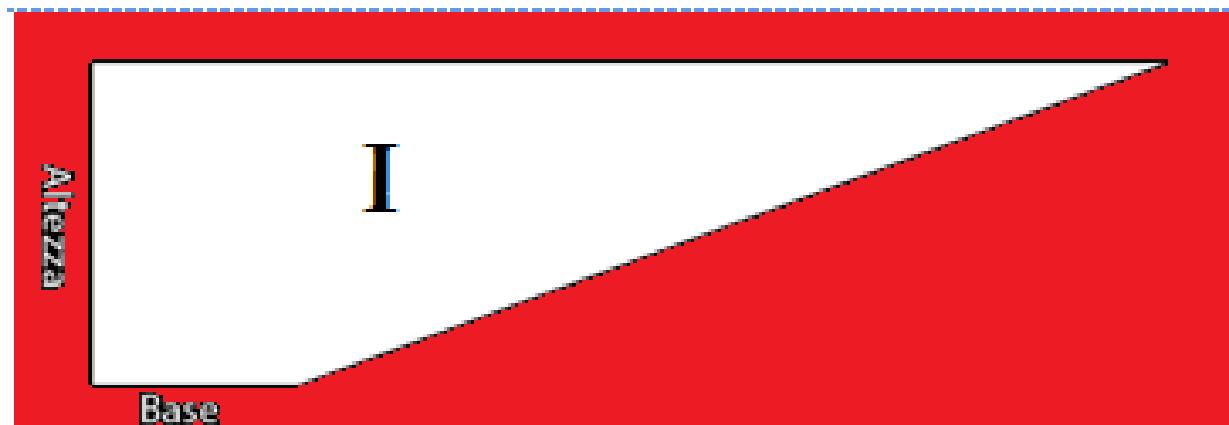
Idea alla base delle quadrature

La proposizione I.35 degli Elementi:
"raddrizzare" un parallelogramma in un
rettangolo equivalente mediante una
equivalenza in moto.

i parallelogrammi costituiti nella medesima base e nelle medesime parallele, sono fra loro uguali (si legga equivalenti).

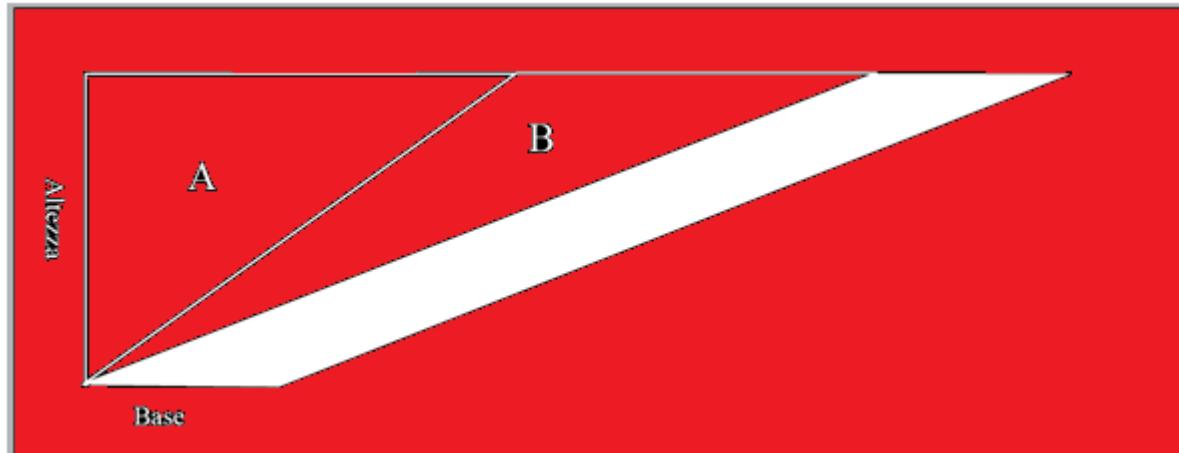


Materiale consegnato ai ragazzi

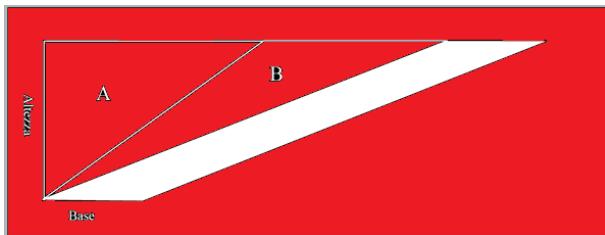


**Inserire i triangoli in modo opportuno per far
si che il poligono differenza $I - (A+B)$ sia
sempre un parallelogramma**

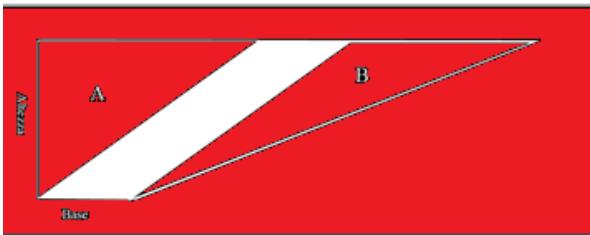
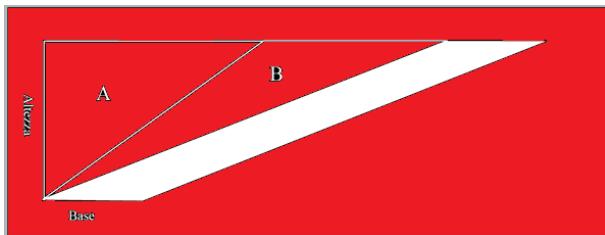
Inserire i triangoli in modo opportuno per far si che il poligono differenza $I - (A+B)$ sia sempre un parallelogramma



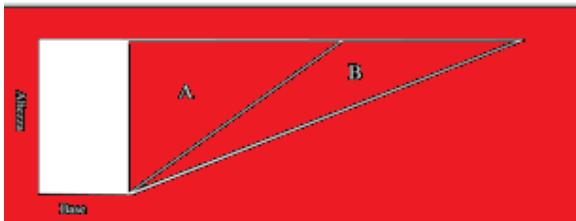
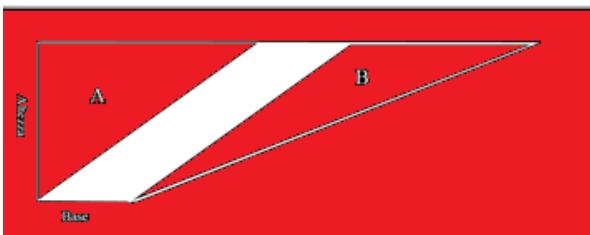
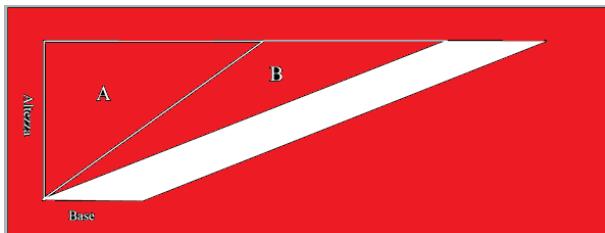
soluzione.....



soluzione.....

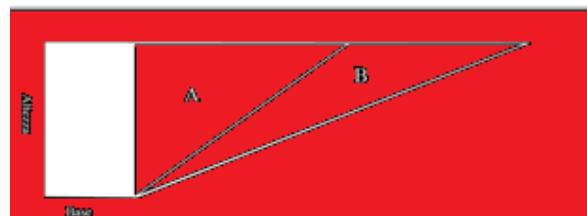
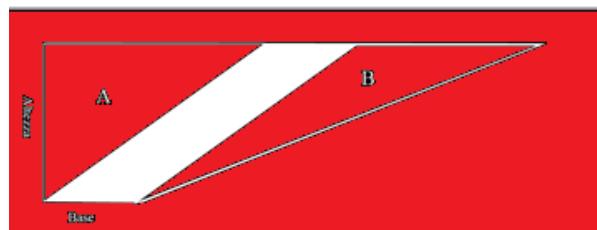
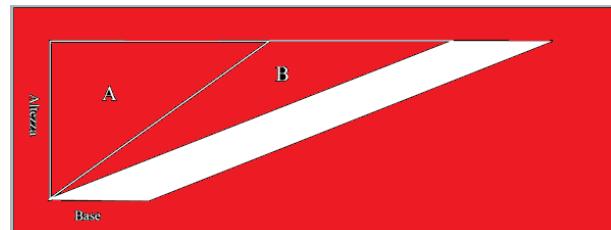


soluzione.....



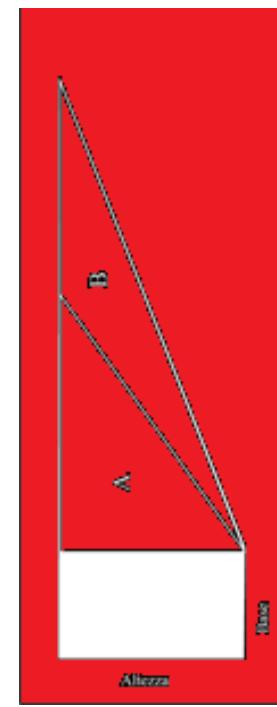
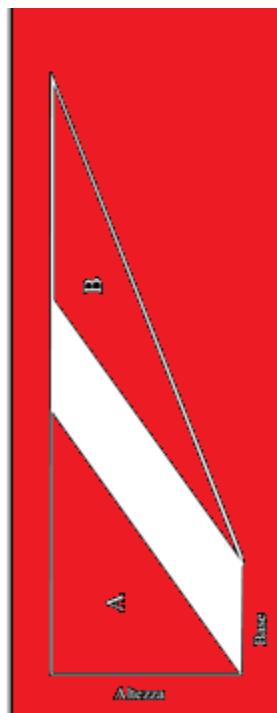
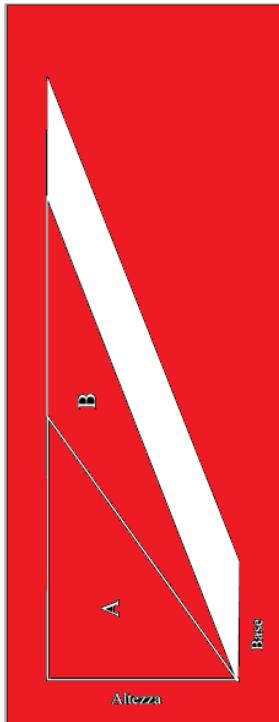
soluzione.....

- 1) Cosa hanno in comune i parallelogrammi?
- 2) Come sono tra di loro le loro aree?



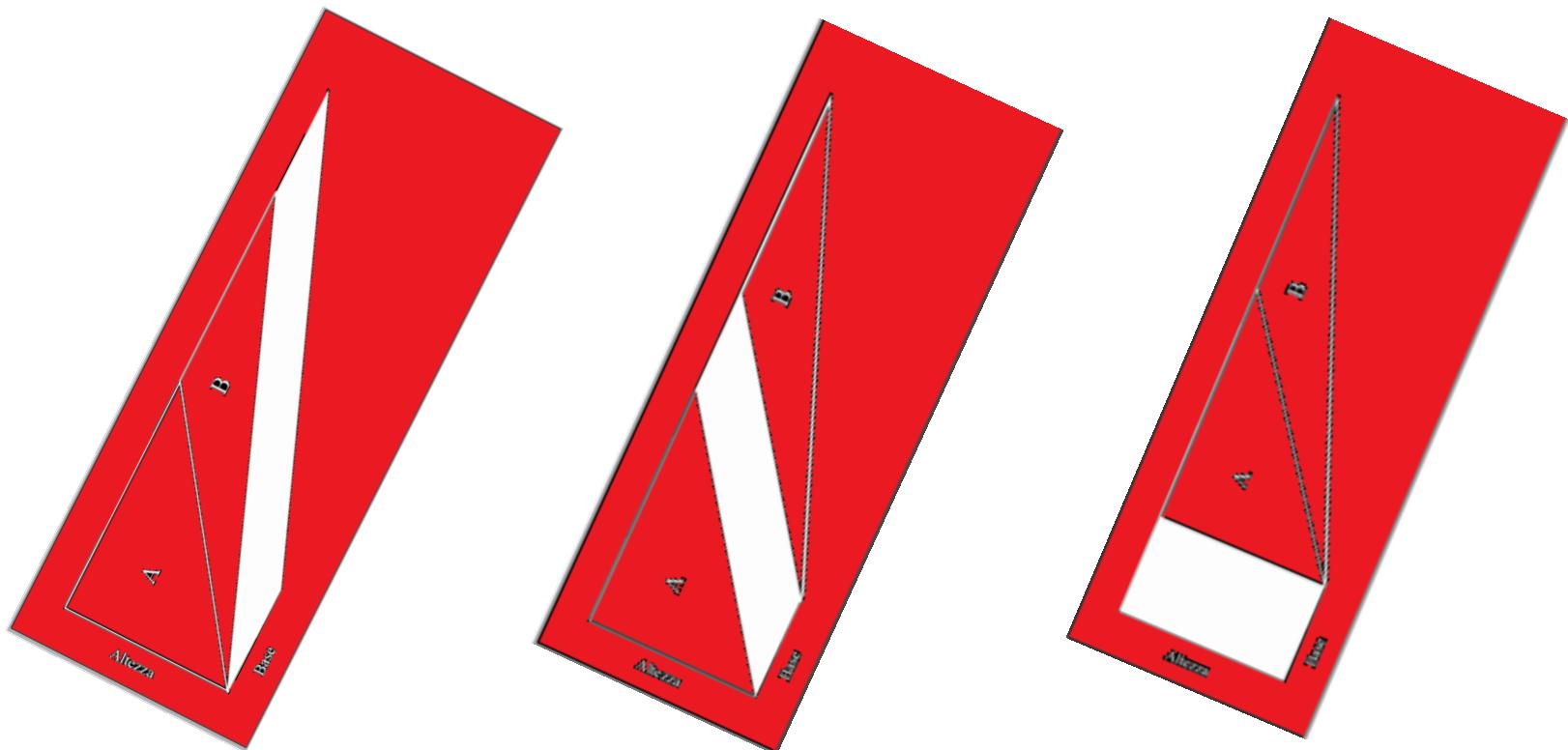
Il primo parallelogramma è stato “raddrizzato” in un rettangolo equivalente di cui è facile calcolarne l’area!!!!

Naturalmente il tutto continua ad essere vero per..



Il primo parallelogramma è stato “raddrizzato” in un rettangolo equivalente di cui è facile calcolarne l’area!!!!

Naturalmente il tutto continua ad essere vero per..



Il primo parallelogramma è stato “raddrizzato” in un rettangolo equivalente di cui è facile calcolarne l’area!!!!

I parallelogrammi “bianchi”
sono tutti diversi l’uno dall’altro
ma equivalenti per la NC 3.

**Quindi la loro area si deduce da quella del
rettangolo che è semplice da calcolare.**

Evidenziare le strutture stabili dei parallelogrammi

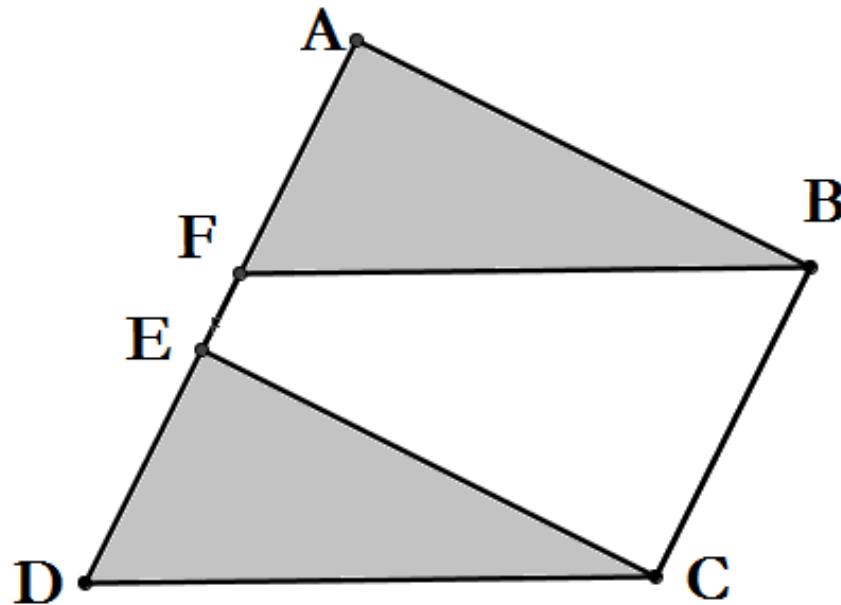
Avviare un primo processo di generalizzazione
Far scrivere l'enunciato
della proposizione I.35.

- Usare : poche parole significative
 - nomi e frasi ideati dagli studenti
- far “imparare” tanto da saper ripetere

Somministrare esercizi di difficoltà sempre maggiori
che permettano di capire se i passi fondanti della
attività siano stati compresi:

- Casi in cui si giunge alla soluzione mediante quanto appreso ([Esercizi di tipo A: Esercizio 1](#))

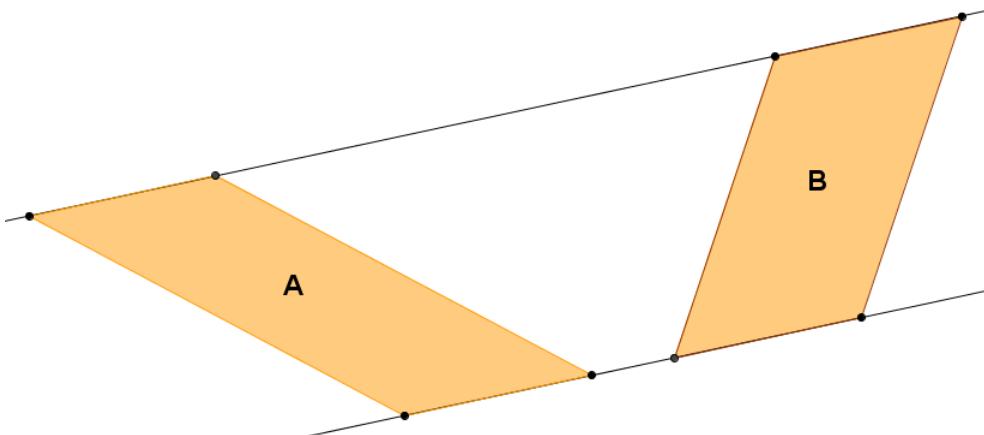
Esercizio 1. Perché i due triangoli grigi contenuti nel trapezio ABCD sono sicuramente equivalenti? Motiva la tua risposta.



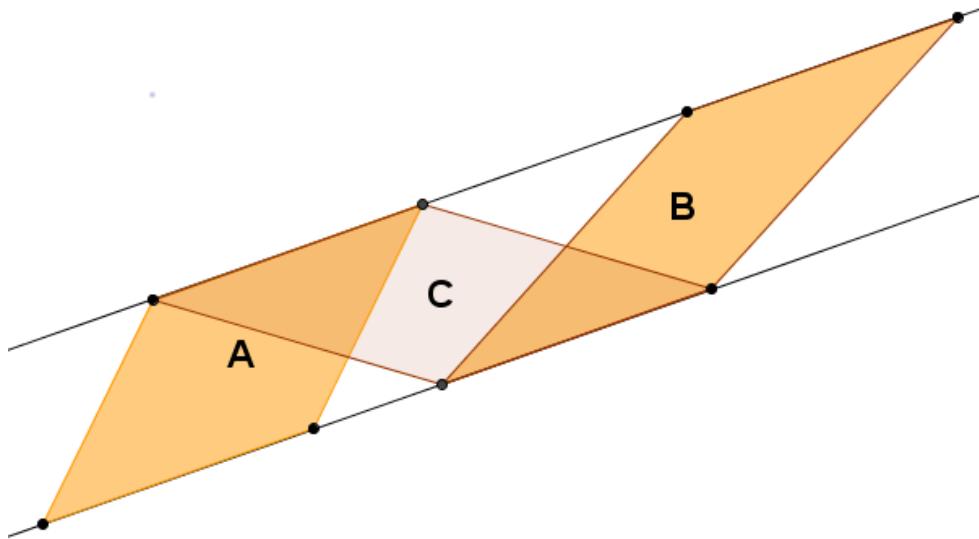
Somministrare esercizi di difficoltà sempre maggiori
che permettano di capire se i passi fondanti della
attività siano stati compresi:

- Casi in cui si giunge alla soluzione mediante quanto appreso ([tipo A, Esercizio 1](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 2](#))

Esercizio 2. I due parallelogrammi A e B della figura qui a lato hanno le basi della stessa lunghezza. Spiega perché hanno sicuramente la stessa area.

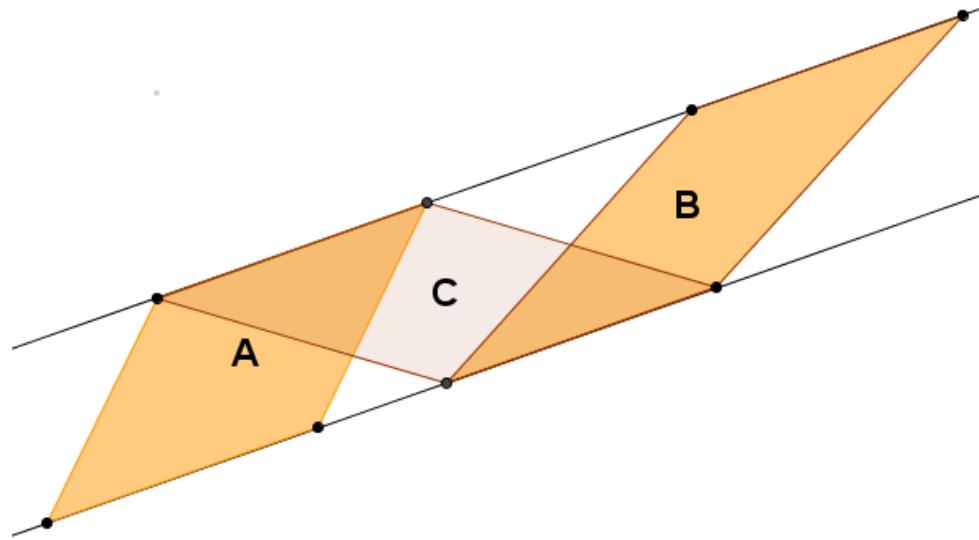


Esercizio 2. I due parallelogrammi A e B della figura qui a lato hanno le basi della stessa lunghezza. Spiega perché hanno sicuramente la stessa area.



A è equivalente a C e C è eq. B per I.35; poi per NC 1 segue che A eq. B.

Far enunciare e trascrivere il risultato scoperto



Osservazione

Non usare altre motivazioni al di fuori del quadro teorico

Es. Se si dovesse affermare:

i parallelogrammi sono equivalenti perché hanno stessa base e stessa altezza!

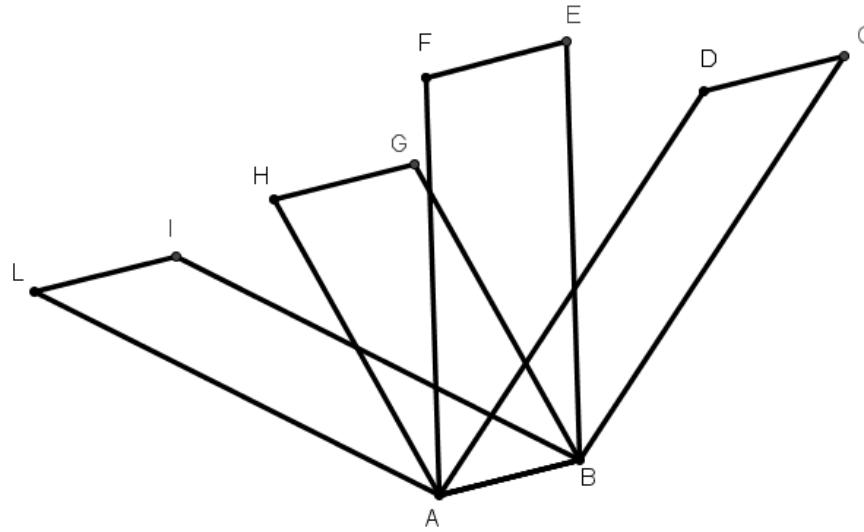
Far notare che l'altezza non è stata mai utilizzata fin d'ora.

Quindi non si può usare tale argomento!

Somministrare esercizi con difficoltà diverse e maggiori che permettano di capire se i passi fondanti della attività siano stati compresi:

- Casi in cui si giunge alla soluzione mediante quanto appreso ([tipo A, Esercizio 1](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 2](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 3](#))

Esercizio 3 Quali tra i parallelogrammi ABCD, ABEF, ABGH,
ABIL sono tra di loro equivalenti? Motiva la risposta.



I parallelogrammi hanno la stessa base ma non sono tutti racchiusi tra due stesse parallele
Cosa si conclude per quelli non racchiusi tra le stesse parallele?

Un po' di logica...

Le negazioni creano sempre qualche problema cognitivo!

- 1) Se A  B
- ma se non vale A, nulla si può concludere su B

- 2) se valgono contemporaneamente A e B  C
- ma se non vale o A o B o entrambi, nulla si può concludere su c.

Un po' di logica...

Nel nostro caso lo schema è:

Se vale a) i parallelogrammi stanno nelle stesse parallele

e vale b) i parallelogrammi hanno la stessa base

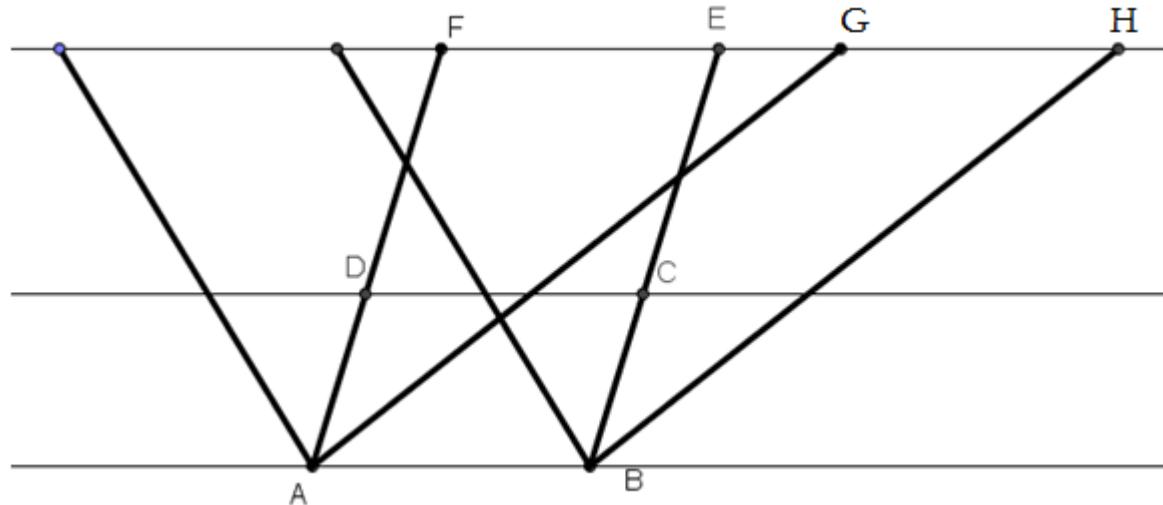
allora vale c) i parallelogrammi sono equivalenti

E se non valesse a) cioè non stessero nelle stesse parallele? Nulla si può concludere...

E se non valesse b)? Cioè non avessero la stessa base? Nulla si può concludere...

Se cadesse una delle due ipotesi?

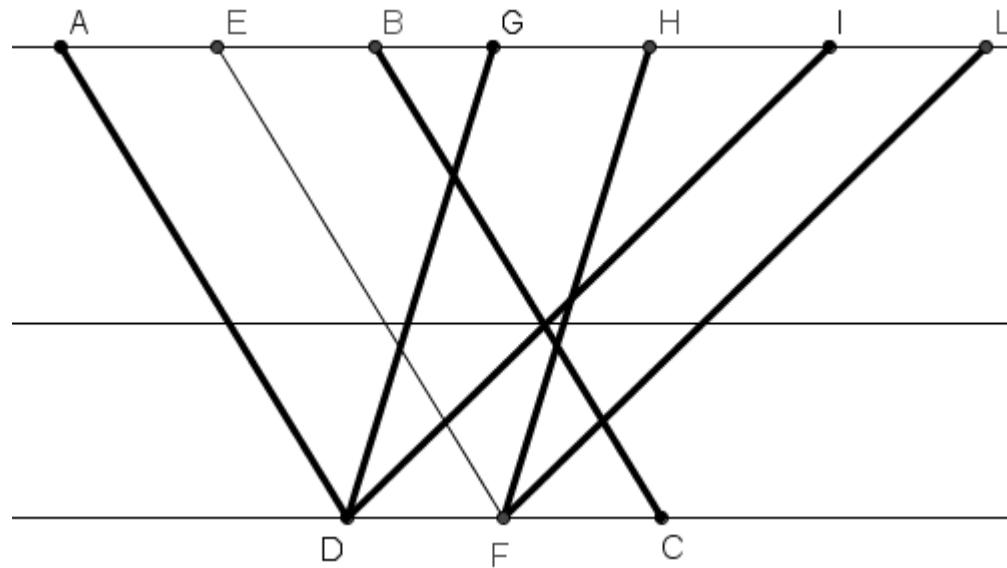
I parallelogrammi **ABCD** e **ABHG** hanno la stessa base ma non sono più racchiusi tra due stesse parallele



Si «usa» il parallelogramma «ausiliario» **ABEF**
 $A(ABCD) < A(ABEF) = A(ABHG)$

Se cadesse una delle due ipotesi?

I parallelogrammi ILFD e ABCD non hanno la stessa base ma sono racchiusi tra le stesse parallele

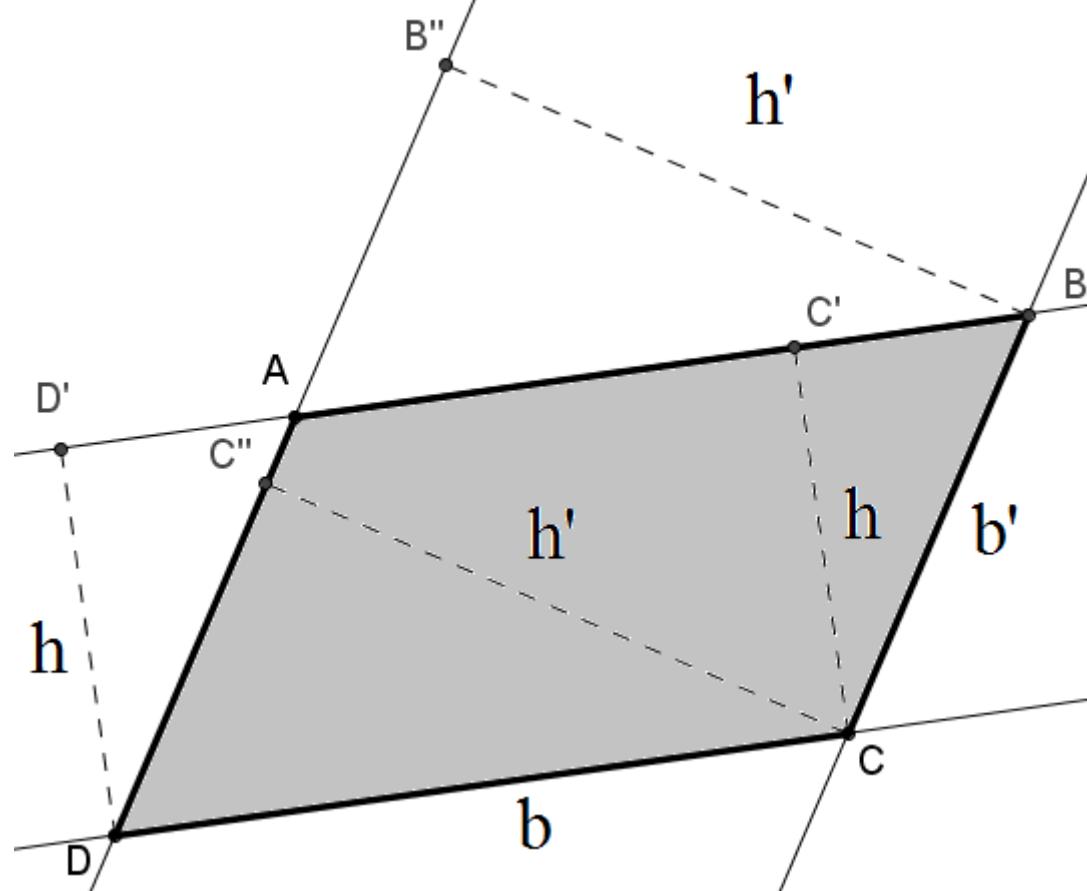


Si «usa» il parallelogramma «ausiliario» AEFD
 $A(ILFD) = A(AEFD) < A(ABCD)$

Somministrare esercizi con difficoltà diverse e maggiori che permettano di capire se i passi fondanti della attività siano stati compresi:

- Casi in cui si giunge alla soluzione mediante quanto appreso ([tipo A, Esercizio 1](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 2](#))
- Casi in cui non si giunge alla soluzione direttamente da quanto appreso ([tipo B, Esercizio 3](#))
- Casi con un “salto”, una visione o creazione particolare ([tipo C, Esercizio 4](#))

Esercizio 4. Spiegare perché nel parallelogramma ABCD qui di lato raffigurato è vero che $bh = b'h'$.



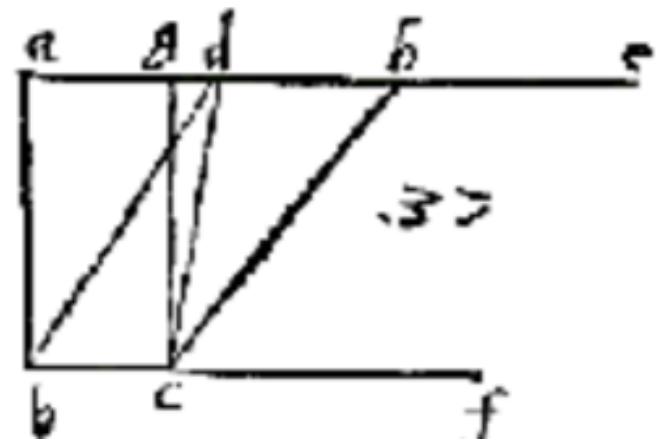
$$A(ABCD) = A(CDD'C') = bh$$

$$\text{quindi } A(ABCD) = bh = b'h'$$

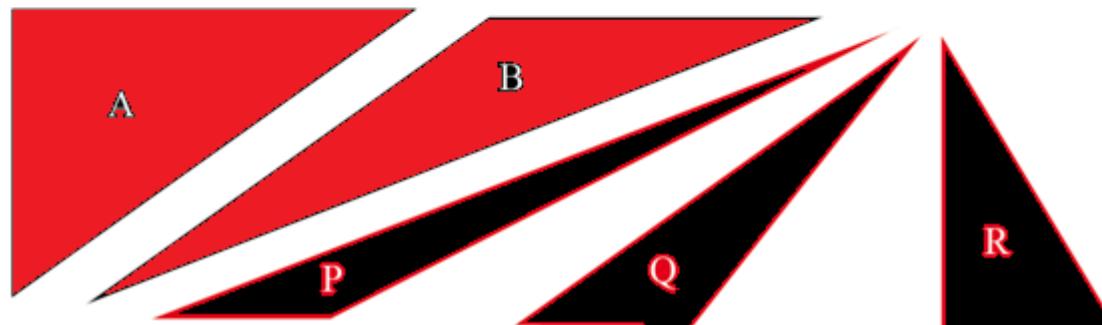
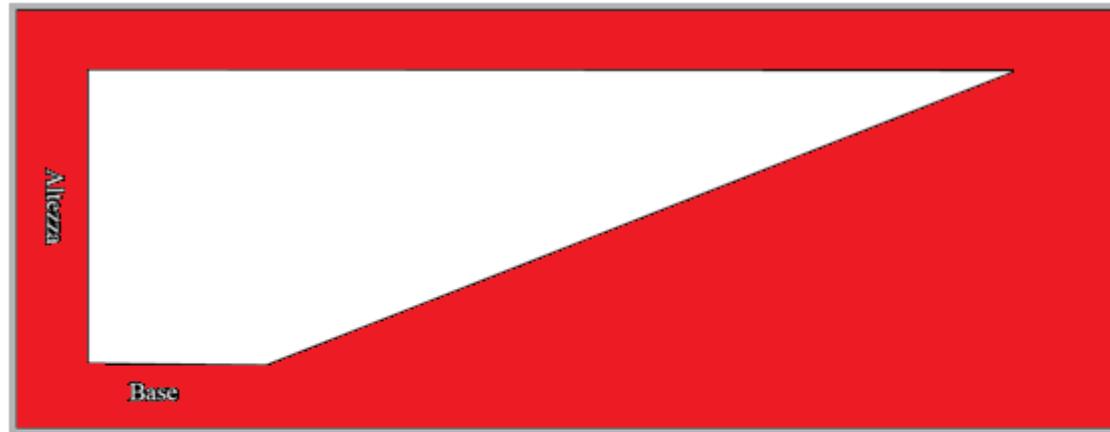
$$A(ABCD) = A(CC''B''B) = b'h'$$

La proposizione I.37 degli Elementi:
"raddrizzare" un qualsiasi triangolo in un
triangolo rettangolo equivalente mediante
una equivalenza in moto.

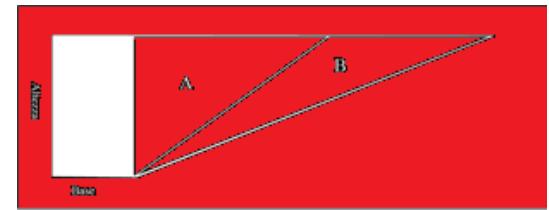
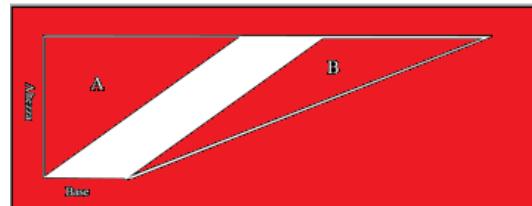
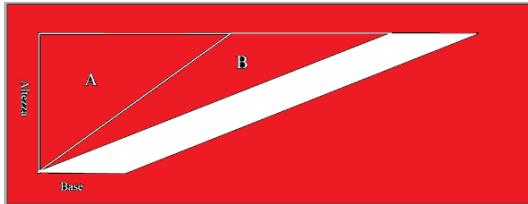
*i triangoli costituiti nella
medesima base e nelle
medesime parallele,
sono fra loro uguali*



Materiale consegnato



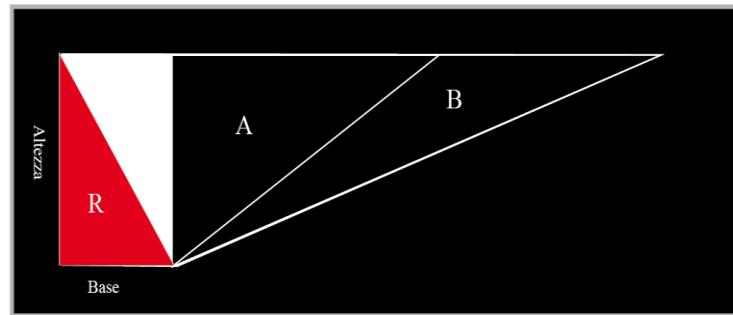
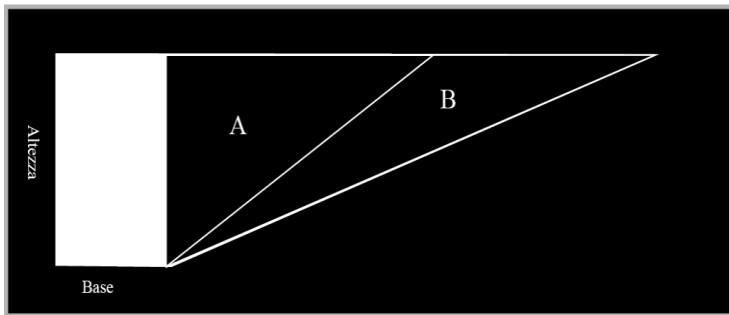
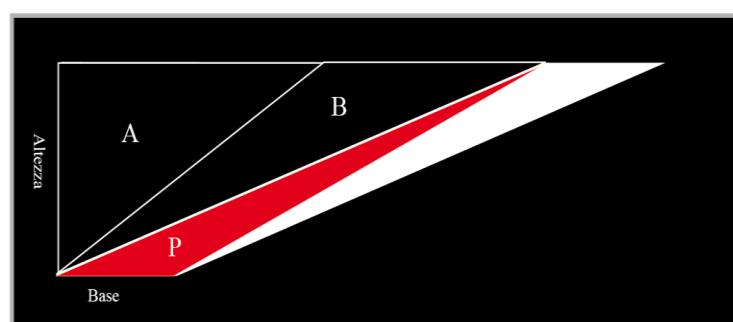
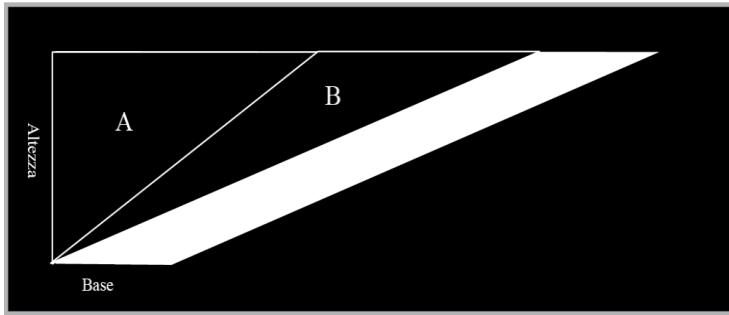
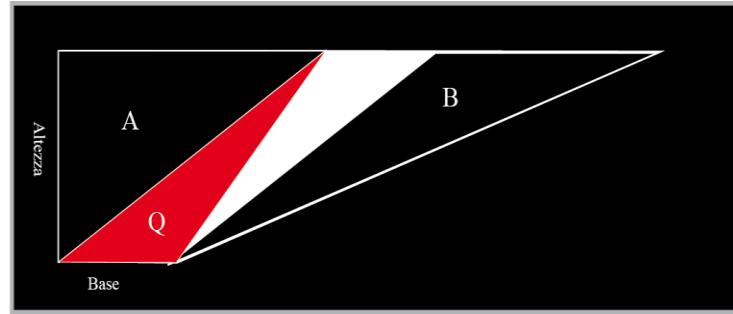
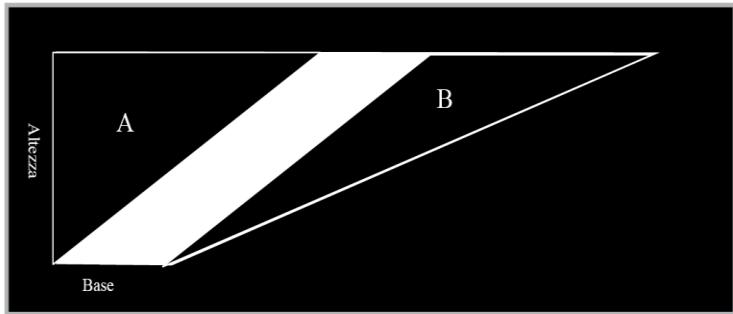
Ripartire da:



**In ciascuna delle tre disposizioni, inserire il triangolo nero
opportuno;**

cosa si può concludere sulle aree dei tre triangoli neri?

Sono equivalenti!!!



Nota: in questo disegno i colori sono invertiti rispetto ai disegni precedenti