Numeri reali e numeri razionali

I **numeri reali** possono essere descritti attraverso uno sviluppo decimale finito o infinito (nell'ambito di questo insegnamento non viene fornita una definizione formale di numero reale).
L'insieme dei numeri reali viene indicato con la lettera $\mathbb{R}$ e rappresentati come una linea retta.
I numeri reali possono essere positivi, negativi o nulli e comprendono, come casi particolari, i numeri naturali, interi, razionali, irrazionali.
Un **numero razionale** è un numero reale che può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n non nullo. Un numero x è quindi razionale esattamente quando, addizionandolo con se stesso, si può ottenere un numero intero: x è razionale se esistono numeri interi n e m tali $n\,x = m$.
L'insieme dei numeri razionali è indicato con $\mathbb{Q}$.
Un numero reale razionale presenta uno sviluppo decimale finito o periodico; ad esempio, $^1/_3$=0,333333……., è razionale.

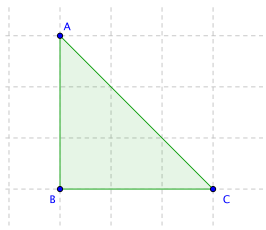
numeri irrazionali
Un **numero irrazionale** è un numero reale che non è un numero razionale, cioè non può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n diverso da 0.

I numeri irrazionali sono i numeri reali la cui espansione decimale non termina mai e non forma una sequenza periodica. [non dimostrato a lezione]

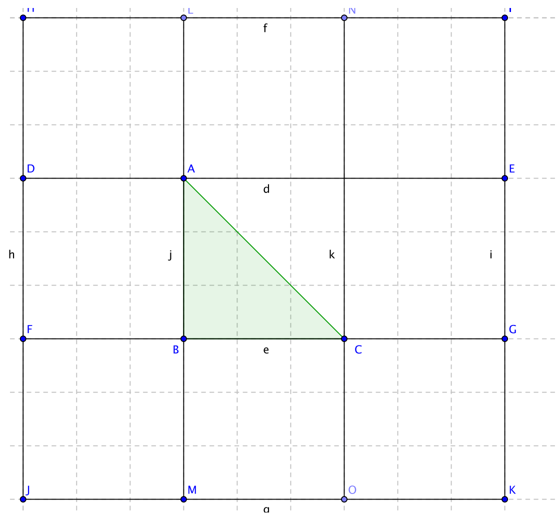
Alcuni dei numeri razionali hanno una descrizione geometrica, come $\sqrt{2}$, $\sqrt{n}$ al variare di n tra i numeri naturali, π.

$\sqrt{2}$ è, per definizione, il numero reale positivo tale che $(\sqrt{2})^2 = 2$.

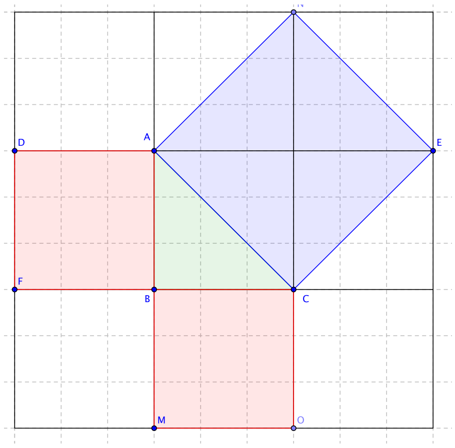
Proposizione: *$\sqrt{2}$ è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1, o, equivalentemente, l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con i cateti di lunghezza 1.*
Più in generale, è il rapporto tra la lunghezza della diagonale e la lunghezza del lato di un quadrato.
dimostrazione Questo risultato segue in modo diretto dal Teorema di Pitagora. Assumendo che l'area dl quadrato è pari al prodotto della misura del lato per se stesso, una dimostrazione intuitiva è fornita dallo studio delle seguenti figure. Si consideri un triangolo rettangolo isoscele



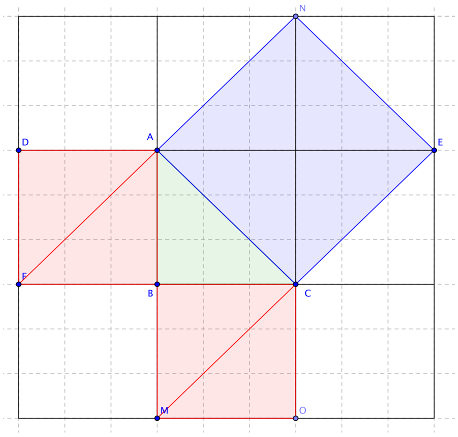
e inseriscilo in una quadrettatura



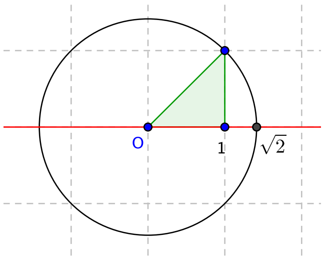
Ora colora i quadrati che hanno per lato i lati del triangolo.



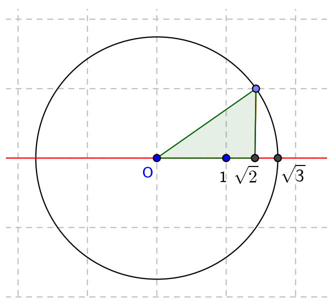
Suddividendo anche i quadrati rossi tramite una diagonale, si osserva che il quadrato blu ha area doppia di ogni quadrato rosso, e quindi la sua area è pari alla somma delle aree dei due quadrati rossi.



Osservazione: Riportando la lunghezza della diagonale con il compasso, è possibile disegnare $\sqrt{2}$ sulla linea dei numeri:



Utilizzando la versione del teorema di Pitagora relativa ad un arbitrario triangolo rettangolo, è possibile vedere che il numero $\sqrt{n+1}$ è la diagonale di un rettangolo i cui cateti hanno lunghezza $\sqrt{n}$ e 1: dunque è possibile disegnare (con riga e compasso) un segmento della lunghezza $\sqrt{n}$ per ogni numero naturale *n*.



Proposizione: $\sqrt{2}$ *è un numero irrazionale*

Dimostrazione per assurdo

Si supponga per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, ovvero che esistano interi $m, n \neq 0$ tali che

$$n\sqrt{2} = m$$

Possiamo supporre che $m, n > 0$ e MCD(m,n)=1. Elevando al quadrato, troviamo che $2n^2 = m^2$.

Ne ricaviamo l'informazione che il numero m^2 è pari. Poiché il quadrato di un numero naturale dispari è sempre dispari, deduciamo che anche m è pari, cioè esiste un numero naturale k tale che $m = 2k$.

Sostituiamo questa uguaglianza in $2n^2 = m^2$ e ricaviamo che

$$2 \times n^2 = (2k)^2 = 2 \times 2 \times k^2 .$$

Dividendo per 2 entrambi i membri, osserviamo che

$$n^2 = 2 \times k^2$$

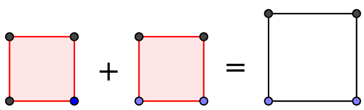
e dunque n^2 è pari. Possiamo ragionare come prima e dedurne che anche n è pari. Sia m che n sono quindi pari, contro l'ipotesi iniziale che MCD(m,n)=1. Concludiamo che $\sqrt{2}$ non è esprimibile sotto forma di frazione, cioè è irrazionale. ♦

Dimostrazione geometrica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

L'ipotesi assurda dell'esistenza di due numeri interi $m, n > 0$ tali che $n\sqrt{2} = m$, come abbiamo visto, comporta l'uguaglianza $2n^2 = m^2$, cioè che esistono due numeri interi $m, n > 0$ tali che

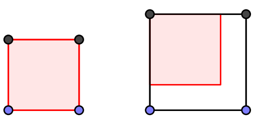
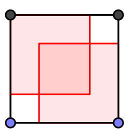
$$n^2 + n^2 = m^2$$

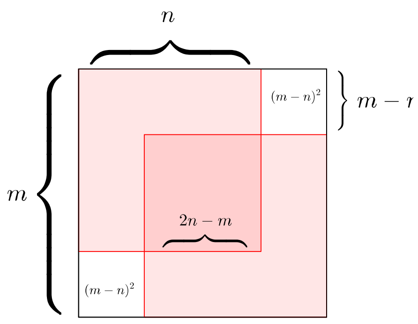
Geometricamente, l'uguaglianza $n^2 + n^2 = m^2$ significa che l'area del quadrato di lato m è equivalente alla somma delle aree di due quadrati uguali di lato n (colorati in rosso in figura).



È perciò possibile trovare un quadrato con lato intero tale che il quadrato che ha il doppio della sua area abbia anch'esso lato intero. Ci si convince facilmente che, se una tale soluzione esiste, ce ne è una sola che ha la caratteristica di essere la più piccola possibile (cioè i due quadrati con lato intero sono i più piccoli con la proprietà che uno ha area doppia dell'altro). Prendiamo quindi questa soluzione minima.

Spostiamo, uno alla volta, i quadrati rossi cercando di coprire il quadrato bianco. Spostiamo il primo quadrato

 , e poi il secondo  .



Osservando con attenzione la figura ottenuta, notiamo che l'area dei due quadrati bianchi piccoli deve essere equivalente all'area del quadrato centrale più scuro (che corrisponde alla sovrapposizione tra i due quadrati spostati: tale sovrapposizione deve esistere necessariamente, perché altrimenti i quadrati rossi non coprirebbero il quadrato più grande). Il quadrato scuro centrale ha lato m- 2(m–n), intero e minore di m; i due quadratini bianchi hanno lato m–n, intero.
Dunque, abbiamo trovato un quadrato di lato intero più piccolo di m, che è il doppio di un quadrato di lato intero. Abbiamo una contraddizione, perché avevamo supposto che i quadrati di lato m e n fossero i più piccoli possibile con questa proprietà. Non era quindi possibile che questi quadrati esistessero, e $\sqrt{2}$ è irrazionale.