Fondamenti della Matematica aa 16-17
Tovena LUMSA

Numeri reali

I **numeri reali** possono essere descritti attraverso uno sviluppo decimale finito o infinito (nell'ambito di questo insegnamento non viene fornita una definizione formale di numero reale).
L'insieme dei numeri reali viene indicato con la lettera $\mathbb{R}$ e rappresentati come una linea retta.
I numeri reali possono essere positivi, negativi o nulli e comprendono, come casi particolari, i numeri naturali, interi, razionali, irrazionali.
Un **numero razionale** è un numero reale che può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n non nullo.
Un numero reale razionale presenta uno sviluppo decimale finito o periodico; ad esempio, $^1/_3$=0,333333……., è razionale.

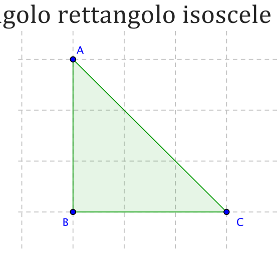
numeri irrazionali
Un **numero irrazionale** è un numero reale che non è un numero razionale, cioè non può essere scritto come rapporto m/n con m e n interi e n diverso da 0.

I numeri irrazionali sono i numeri reali la cui espansione decimale non termina mai e non forma una sequenza periodica. [non dimostrato a lezione]

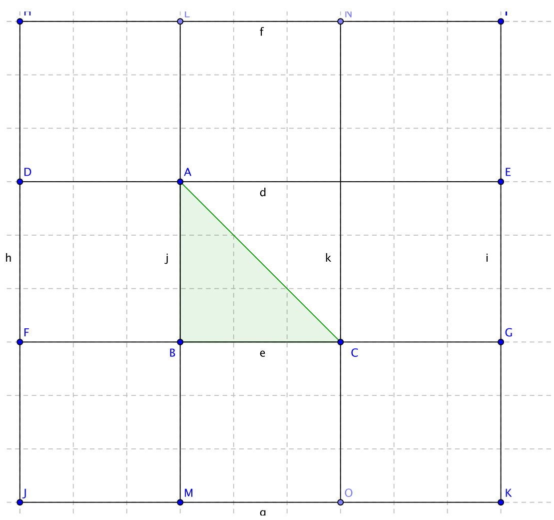
Alcuni dei numeri razionali hanno una descrizione geometrica, come $\sqrt{2}$, $\sqrt{n}$ al variare di n tra i numeri naturali, π.

$\sqrt{2}$ è, per definizione, il numero reale positivo tale che ($\sqrt{2}$)^2 = 2.

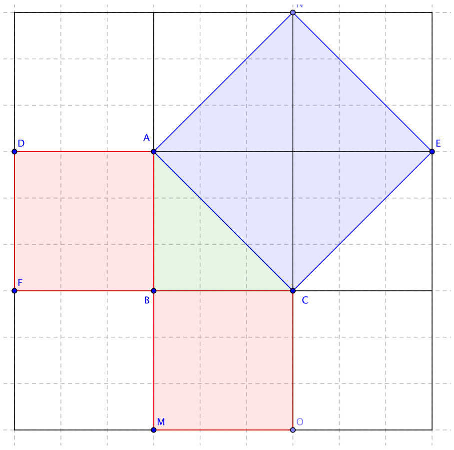
Proposizione: $\sqrt{2}$ *è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1, o, equivalentemente, l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con i cateti di lunghezza 1.*
Più in generale, è il rapporto tra la lunghezza della diagonale e la lunghezza del lato di un quadrato.
dimostrazione Questo risultato segue in modo diretto dal Teorema di Pitagora. Assumendo che l'area dl quadrato è pari al prodotto della misura del lato per se stesso, una dimostrazione intuitiva è fornita dallo studio delle seguenti figure. Si consideri un triangolo rettangolo isoscele



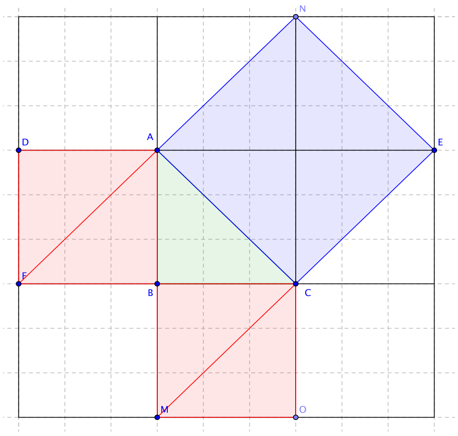
e inseriscilo in una quadrettatura



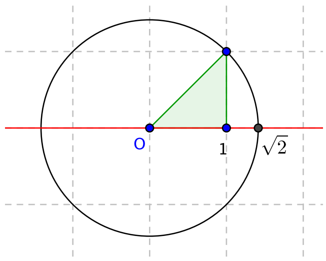
Ora colora i quadrati che hanno per lato i lati del triangolo.



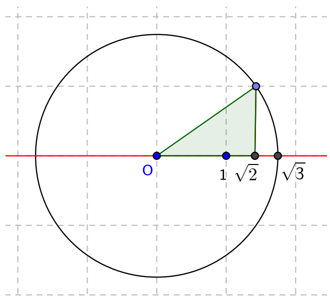
Suddividendo anche i quadrati rossi tramite una diagonale, si osserva che il quadrato blu ha area doppia di ogni quadrato rosso, e quindi la sua area è pari alla somma delle aree dei due quadrati rossi.



Osservazione: Riportando la lunghezza della diagonale con il compasso, è possibile disegnare $\sqrt{2}$ sulla linea dei numeri:



Utilizzando la versione del teorema di Pitagora relativa ad un arbitrario triangolo rettangolo, è possibile vedere che il numero $\sqrt{n+1}$ è la diagonale di un rettangolo i cui cateti hanno lunghezza $\sqrt{n}$ e 1: dunque è possibile disegnare (con riga e compasso) un segmento della lunghezza $\sqrt{n}$ per ogni numero naturale *n*.



Proposizione: $\sqrt{2}$ *è un numero irrazionale*

Dimostrazione per assurdo

Si supponga per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, ovvero che esistano interi m, $n \neq 0$ tali che

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Possiamo supporre che $m, n > 0$ e MCD(m,n)=1. Elevando al quadrato, troviamo che $2 = \frac{m^2}{n^2}$, cioè $2\, n^2 = m^2$.

Ne ricaviamo l'informazione che il numero m^2 è pari. Poiché il quadrato di un numero naturale dispari è sempre dispari, deduciamo che anche m è pari, cioè esiste un numero naturale k tale che $m = 2\,k$.

Sostituiamo questa uguaglianza in $2\,n^2 = m^2$ e ricaviamo che

$$2 \times n^2 = (2\,k)^2 = 2 \times 2 \times k^2.$$

Dividendo per 2 entrambi i membri, osserviamo che

$$n^2 = 2 \times k^2$$

e dunque n^2 è pari. Possiamo ragionare come prima e dedurne che anche n è pari. Sia m che n sono quindi pari, contro l'ipotesi iniziale che MCD(m,n)=1. Concludiamo che $\sqrt{2}$ non è esprimibile sotto forma di frazione, cioè è irrazionale. ♦