**Numeri reali e numeri irrazionali**

I **numeri reali** possono essere descritti attraverso uno sviluppo decimale finito o infinito (nell'ambito di questo insegnamento non viene fornita una definizione formale di numero reale).
I numeri reali possono essere positivi, negativi o nulli e comprendono, come casi particolari, i numeri naturali , interi, razionali, irrazionali.
Un numero reale razionale presenta uno sviluppo decimale finito o periodico; ad esempio, $^1/_3$=0,333333 = 0, è razionale. L'insieme dei numeri reali viene indicato con la lettera $\mathbb{R}$ e rappresentati come una linea retta.

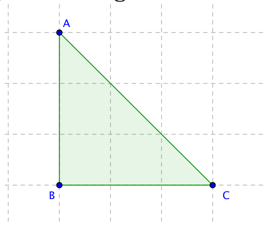
Un **numero irrazionale** è un numero reale che non è un numero razionale, cioè non può essere scritto come una frazione $m/n$ con $m$ e $n$ interi e $n$ diverso da 0.

I numeri irrazionali sono i numeri reali la cui espansione decimale non termina mai e non forma una sequenza periodica. [non dimostrato a lezione]

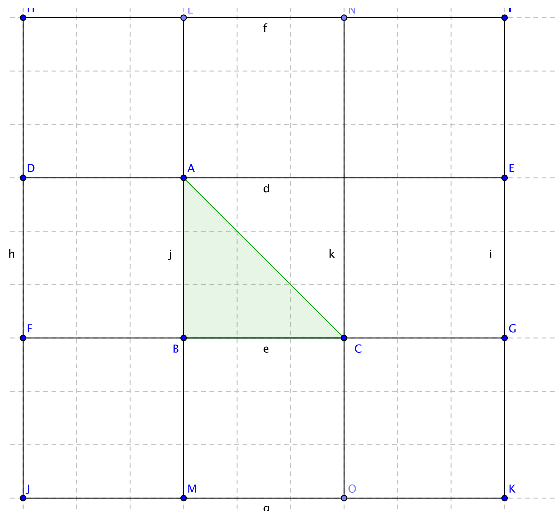
Alcuni dei numeri razionali hanno una descrizione geometrica, come $\sqrt{2}$ , $\sqrt{n}$ al variare di n tra i numeri naturali, $\pi$.

$\sqrt{2}$ è, per definizione, il numero reale positivo tale che ( $\sqrt{2}$ )$^2$ = 2.

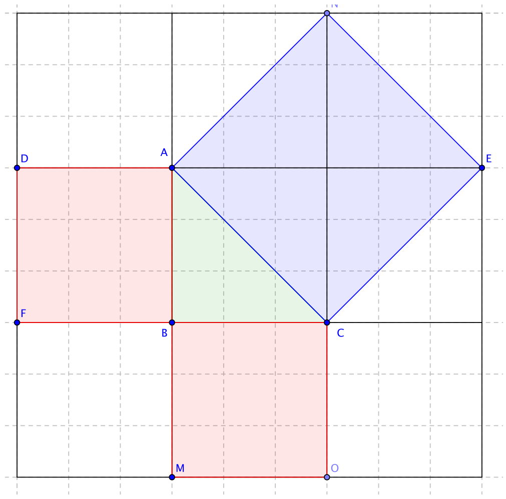
**Proposizione**: $\sqrt{2}$ *è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1, o, equivalentemente, l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con i cateti di lunghezza 1.*
*Più in generale, è il rapporto tra la lunghezza della diagonale e la lunghezza del lato di un quadrato.*
dimostrazione Questo risultato segue in modo diretto dal Teorema di Pitagora. Assumendo che l'area dl quadrato è pari al prodotto della misura del lato per se stesso, una dimostrazione intuitiva è fornita dallo studio delle seguenti figure. Si consideri un triangolo rettangolo isoscele



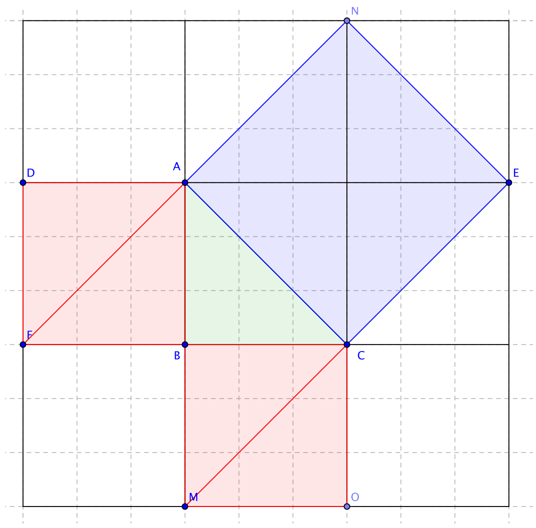

e inseriscilo in una quadrettatura



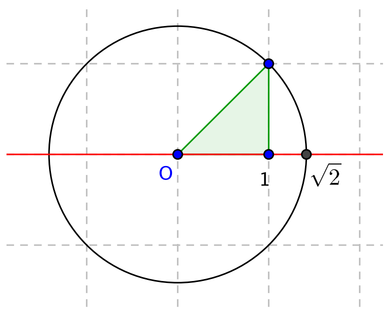

Ora colora i quadrati che hanno per lato i lati del triangolo.



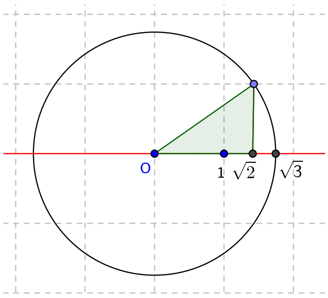

Suddividendo anche i quadrati rossi tramite una diagonale, si osserva che il quadrato blu ha area doppia di ogni quadrato rosso, e quindi la sua area è pari alla somma delle aree dei due quadrati rossi.




Osservazione: Con il compasso, è possibile riportare la lunghezza della diagonale: è dunque possibile disegnare sulla linea dei numeri:




Utilizzando la versione del teorema di Pitagora relativa ad un arbitrario triangolo rettangolo, è possibile vedere che $\sqrt{n+1}$ è la diagonale di un rettangolo di lati $\sqrt{n}$ e 1: dunque è possibile disegnare (con riga e compasso) un segmento della lunghezza $\sqrt{n}$ per ogni numero naturale $n$.π




**Proposizione**: $\sqrt{2}$ *è un numero irrazionale*

**Dimostrazione per assurdo**

Si supponga per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, ovvero che esistano interi $m$, $n \neq 0$ tali che

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Possiamo supporre che $m, n > 0$ e MCD($m$,$n$)=1. Elevando al quadrato, troviamo che $2 = \frac{m^2}{n^2}$, cioè $2\, n^2 = m^2$.

Ne ricaviamo l'informazione che il numero $m^2$ è pari. Poiché il quadrato di un numero naturale dispari è sempre dispari, deduciamo che anche $m$ è pari, cioè esiste un numero naturale $k$ tale che $m = 2\, k$.

Sostituiamo questa uguaglianza in $2\, n^2 = m^2$ e ricaviamo che

$$2 \times n^2 = (2\, k)^2 = 2 \times 2 \times k^2 .$$

Dividendo per 2 entrambi i membri, osserviamo che

$$n^2 = 2 \times k^2$$

e dunque $n^2$ è pari. Possiamo ragionare come prima e dedurne che anche $n$ è pari. Sia m che n sono quindi pari, contro l'ipotesi iniziale che MCD($m$,$n$)=1. Concludiamo che $\sqrt{2}$ non è esprimibile sotto forma di frazione, cioè è irrazionale. ♦