LUMSA - Università degli Studi di Roma Tor Vergata
Principio di induzione matematica

Prof. F. Tovena

Il Principio di induzione matematica è una tecnica di dimostrazione che permette la dimostrazione simultanea di infinite affermazioni.

Un insieme è *infinito* se è in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Ad esempio, l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è infinito perché è in corrispondenza biunivoca con il suo sottoinsieme proprio formato dai numeri pari: basta, infatti, considerare la funzione:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$

Si osservi che $\mathbf{N}$ è in corrispondenza biunivoca anche con il sottoinsieme dei numeri dispari (disgiunto dal sottoinsieme dei pari), ad esempio tramite la funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array}$$

Una ulteriore caratteristica dei numeri naturali è quella che *ogni numero naturale ha un successivo, e tale successivo è unico*: il numero successivo del numero n è il numero $n+1$.

Il principio di induzione può essere applicato quando è assegnata una affermazione il cui enunciato dipende da un numero naturale n, e si vuole dimostrare che tale affermazione è vera non appena n è maggiore o uguale di un prefissato valore. Si basa sul fatto che, partendo da un numero naturale fissato n_0 e ripetendo il passaggio tra un numero e il suo successivo, si raggiunge (con un numero finito di passi) qualsiasi prefissato numero n maggiore di n_0.
Esempi di affermazioni che dipendono da un numero naturale $n \geq 1$ (è possibile enunciare anche affermazioni false):

1.1) $A(n)$: la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n\,(n+1)}{2}$;

1.2) $B(n)$: ogni poligono piano convesso con n lati ha esattamente n diagonali;

1.3) $C(n)$: la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di $(n+2)$ lati è uguale a $n \cdot 180^o$;

1.4) $D(n)$: il prodotto dei primi n numeri è uguale a 6.

1.5) $E(n)$: Tracciando n rette nel piano euclideo, non è possibile dividere il piano in più di 2^n parti.

1.6) $F(n)$: $(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$.

1.7) $G(n)$: ogni numero naturale n è prodotto di numeri primi.

1.8) $H(n)$: 6 divide $8^n - 2^n$

Sostituendo a n un valore particolare, si ricava

2.1) $A(n)$ per $n = 5$ diventa: la somma dei primi 5 numeri naturali è uguale a $\frac{5\,(5+1)}{2}$, cioè $1+2+3+4+5 = \frac{5\,(5+1)}{2}$;

2.2) $B(n)$ per $n = 6$: ogni poligono piano convesso con 6 lati (cioè ogni esagono piano convesso) ha esattamente n diagonali;

2.3) $C(n)$ per $n = 3$: la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di 5 lati è uguale a $3 \cdot 180^o$;

2.4) $D(n)$ per $n = 2$: il prodotto dei primi 2 numeri è uguale a 6, (cioè $1 \cdot 2 = 6$ e capiamo che l'affermazione è falsa per $n = 2$).

2.5) $E(n)$ per $n = 4$: Tracciando 4 rette nel piano euclideo, non è possibile dividere il piano in più di $2^4 = 16$ parti.

2.6) $F(n)$ per $n = 1$ diventa: $(1 + 3)^2 = 1 + 6 + 9$, (e notiamo che l'affermazione è vera per $n = 1$).

Occorre distinguere tra una dimostrazione matematica (cui consegue un teorema) e una convinzione basata sul ripetersi di un evento (cui segue una ragionevole aspettativa che un evento si ripeta nelle modalità previste), e osservare che (malgrado il nome) il principio di induzione è un processo deduttivo e non induttivo. Il principio di induzione permette di dimostrare che una affermazione è vera, senza alcuna eccezione, per ogni numero naturale maggiore o uguale ad un numero prefissato.

Si osservi che è possibile dimostrare in modo diretto, per ogni $n \geq 1$, l'affermazione $F(n)$: $(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$; infatti,

$$
\begin{aligned}
(n+3)^2 &= (n+3) \times (n+3) \text{ per definizione di potenza} \\
&= n \cdot n + 3 \cdot n + n \cdot 3 + 3 \cdot 3 \text{ per la proprietà distributiva} \\
&= n^2 + 3 \cdot n + n \cdot 3 + 3^2 \text{ per definizione di potenza} \\
&= n^2 + 3 \cdot n + 3 \cdot n + 3^2 \text{ per la proprietà commutativa del prodotto} \\
&= n^2 + 2 \cdot (3 \cdot n) + 3^2 \text{ per la proprietà distributiva} \\
&= n^2 + 6 \cdot n + 3^2 \text{ per la proprietà associativa del prodotto}
\end{aligned}
$$

Non sempre è però possibile una dimostrazione diretta, e il principio di induzione offre una differente modalità di lavoro. Si noti che non è sufficiente mostrare che l'affemazione è vera in 'molti' casi.

Principio di induzione
Supponiamo di voler dimostrare che una affermazione $P(n)$ (dipendente da n) è vera per ogni $n \geq n_0$ (ove n_0 sia un valore prefissato). La tecnica di dimostrazione che si basa sul principio di induzione consiste in due passi:
a) **la base induttiva** : si dimostra che l'affermazione è vera quando n coincide con n_0 (cioè per il più piccolo numero a cui siamo interessati).
b) **il passo induttivo** : mostriamo che, se l'affermazione $P(k)$ è vera per un certo numero $k \geq n_0$, allora è vera anche per il numero successivo $(k + 1)$.
Se siamo in grado di svolgere entrambi i passi, allora il principio di induzione assicura che l'affermazione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Si noti che non ricaviamo nessuna informazione sul fatto che $P(n)$ sia vera o falsa per $n < n_0$.
È importante osservare che, nella dimostrazione relativa al passo induttivo, si suppone che l'affermazione $P(k)$ sia vera per k: tale ipotesi passa sotto il nome di *ipotesi induttiva*. In simboli, i passi della dimostrazione per induzione possono essere scritti come:

a) **la base induttiva**: mostro che $P(n_0)$ è vero .
b) **il passo induttivo**: per $k \geq n_0$, mostro che $P(k) \Longrightarrow P(k + 1)$.
Deduco che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Proviamo ad applicare il principio di induzione alle affermazioni elencate in precedenza. Per ciascuna di esse, devo innanzitutto stabilire per quali valori di n vogliamo eseguire la dimostrazione.

3.1) Verifica se la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 1$:

$A(n)$: la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n\,(n+1)}{2}$.

In questo caso, $n_0 = 1$. Riscriviamo l'affermazione nella forma:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} \tag{1}$$

a) **base induttiva**: mostro che $A(1)$ è vero .

Per $n = 1$, la somma a sinistra contiene solo un numero e l'affermazione diventa $A(1) : 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$. Poichè $\frac{1\,(1+1)}{2} = 1$, la base induttiva è provata.

b) **passo induttivo**: mostro che $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$.

Per ipotesi induttiva, diamo per vero che $1+2+3+\ldots+k = \frac{k\,(k+1)}{2}$. Possiamo utilizzare questo fatto per dimostrare $A(k+1)$. Per ottenere l'espressione di $A(k+1)$, devo sostituire in (1) la lettera n con $(k+1)$

$$A(k+1) : \; 1+2+3+\ldots+(k+1) = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

Si noti come l'espressione (1) favorisca la dimostrazione del passo induttivo più dell'espressione iniziale a parole. Infatti:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+(k+1) &= 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = (1+2+3+\ldots+k)+(k+1) = \\
&= \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \frac{k\,(k+1)+2(k+1)}{2} \quad \text{svolgendo la somma} \\
&= \frac{(k\;+2)(k+1)}{2} \quad \text{per la proprietà distributiva} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{per la commutativià del prodotto}
\end{aligned}$$

Il passo induttivo è dimostrato e quindi, applicando il principio di induzione, abbiamo dimostrato che, per ogni $n \geq 1$, la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n\,(n+1)}{2}$.

La dimostrazione è terminata, ma possiamo fare alcune osservazioni. Innanzitutto, la dimostrazione non ha fornito indizi su come è stata ricavata l'espressione $\frac{n\,(n+1)}{2}$ prevista per calcolare la somma; l'enunciato era quindi una informazione da avere prima di iniziare la dimostrazione, e va trovato in modo autonomo. Per avere una idea di come ricavare l'enunciato, e una evidenza geometrica sulla verità dell'enunciato, è possibile rivedere la situazione in altro modo. Scrivendo due volte i numeri da sommare (riportandoli su due righe, nella prima in ordine crescente e nella seconda riga in ordine decrescente)

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & \ldots & (n-1) & n \\
n & (n-1) & (n-2) & \ldots & \ldots & 2 & 1
\end{array}$$

osserviamo che, in ogni colonna, la somma è uguale a $(n+1)$ e le colonne sono n; dunque la somma dei numeri contenuti nelle due righe è $n\,(n+1)$: ma la somma cercata $1+2+3+\ldots+n$ è la metà di tale quantità. Rappresentando i numeri tramite regoli, l'evidenza geometrica è enfatizzata.

3.2) Verifica se la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 1$:

$C(n)$: la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di $(n+2)$ lati è uguale a $n \cdot 180^o$-

Osserviamo che in questo caso $n_0 = 1$.

a) **base induttiva**: mostro che $C(1)$ è vero .

Un poligono convesso con 3 lati è un triangolo, che ha somma degli angoli pari a 180^o per la proposizione del primo libro degli Elementi di Euclide.

b) **passo induttivo**: mostro che (per $k \geq 1$) $C(k) \Longrightarrow C(k+1)$.

Per ipotesi induttiva, suppongo che la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di $(k+2)$ lati è uguale a $k \cdot 180^o$, e devo dimostrare che la somma degli angoli di ogni poligono piano convesso di $(k+3)$ lati è uguale a $(k+1)\cdot 180^o$. Considero un poligono piano convesso $\mathcal{P}$ con $(k+3)$ lati e, in esso, due lati consecutivi $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$: la diagonale d che congiunge i vertici non comuni di tali lati è interna a $\mathcal{P}$ (per definizione di convessità). Il poligono $\mathcal{P}'$ ottenuto da $\mathcal{P}$ considerando il lato d al posto dei lati $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ risulta essere un poligono di $k+2$ lati. Il poligono $\mathcal{P}$ risulta scomposto nell'unione di $\mathcal{P}'$ e il triangolo $\mathcal{T}$ avente per lati $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ e d. La somma degli angoli interni di $\mathcal{P}$ è dunque uguale alla somma degli angoli interni di $\mathcal{P}'$ (che, per ipotesi induttiva è $k\cdot 180^o$,) e la somma degli angoli interni del triangolo $\mathcal{T}$ (che è di 180^o per la base induttiva). La somma degli angoli interni di $\mathcal{P}$ è dunque uguale a $(k+1)\cdot 180^o$, come si voleva.

Deduco che $C(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

Può essere utile trattare alcuni casi intermedi, per comprendere meglio la dimostrazione: per $n=2$, il quadrilatero $\mathcal{P}$ è diviso dalla diagonale in due triangoli. Per $n=3$, il pentagono $\mathcal{P}$ è diviso dalla diagonale in un quadrilatero e un triangolo. due triangoli.

3.3) Verifica se la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 1$:

$H(n)$: 6 divide $8^n - 2^n$.

Anche in questo caso, $n_0 = 1$.

a) **base induttiva**: mostro che $H(1)$ è vero .

Per $n=1$, $8^n - 2^n$ $=8-2=6$ è divisibile per 6, e la base induttiva è vera.

b) **passo induttivo**: per $k \geq 1$, mostro che $H()k \Longrightarrow H(k+1)$.

Devo mostrare che 6 divide $8^{k+1} - 2^{k+1}$. Osservo che

$$\begin{aligned}
8^{k+1} - 2^{k+1} &= 8\cdot 8^k - 2\cdot 2^k = (6+2)\cdot 8^k - 2\cdot 2^k \\
&= 6\cdot 8^k + 2\cdot 8^k - 2\cdot 2^k \\
&= 6\cdot 8^k + 2\cdot(8^k - 2^k)
\end{aligned}$$

Dunque, $8^{k+1} - 2^{k+1}$ è la somma di un multiplo di 6 e di un multiplo di $8^k - 2^k$ (che, per ipotesi induttiva è un multiplo di 6). Dunque $8^{k+1} - 2^{k+1}$ è a sua volta un multiplo di 6, come si voleva. Deduco che $H(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

Esercizi

5.1) *Verifica che la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 1$:*
$1+3+5+7+\ +(2n-1) = n^2$. (si osservi che, per ottenere un quadrato di lato $(n+1)$ da un quadrato di lato n è sufficiente 'bordarlo' su due lati, aggiungendo $(2n+1)$ quadrati unitari).
Dimostriamo l'affernmazione $P(n)$ applicando il principio di induzione:
a) P(1) è vera perché $1 = 1^2$
b) Per $k \geq 1$, si supponga vera $P(k)$, i.e. $1+3+5+7+\ +(2k-1) = k^2$, e si consideri $P(k+1)$: $1+3+5+7+\ +(2k+1) = (k+1)^2$. Osserviamo che $1+3+5+\ +(2k+1) = [1+3+5+\ +(2k-1)]+(2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$; dunque $P(k+1)$ è vera, e la tesi è dimostrata.

5.2) *Mostra che, per ogni $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$*

5.3) *Mostra che, per ogni $n \geq 1$, $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ è un multiplo di 7* a) ok per $n=1$. b) Supponiamo che l'affermazione sia vera per $n=k$, cioè $3^{2k+1}+2^{k-1}$ è un miltiplo di 7. Dobbiamo provare che l'affermazione è vera per $n=k+1$, cioè che $3^{2k+3} + 2^k$ è un multiplo di 7. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
3^{2k+3} + 2^k &= 3^2\cdot 3^{2k+1} + 2\cdot 2^{k-1} \\
&= 9\cdot 3^{2k+1} + 2\cdot 2^{k-1} \\
&= (7+2)\cdot 3^{2k+1} + 2\cdot 2^{k-1} \\
&= 7\cdot 3^{2k+1} + 2\cdot 3^{2k+1} + 2\cdot 2^{k-1} \\
&= 7\cdot 3^{2k+1} + 2\cdot(3^{2k+1} + 2^{k-1}) \\
&= (\textit{multiplo di } 7) + 2\cdot(\textit{multiplo di } 7) \\
&= (\textit{multiplo di } 7)
\end{aligned}$$

5.4) *Nel piano euclideo sono disegnate $n \geq 1$ circonferenze. Esse dividono il piano in regioni. Mostra che sono sufficienti due colori per colorare il piano, in modo tale che siano colorate con colori differenti due regioni che abbiano in comune una linea di confine.*

5.5) *Trova l'errore nella seguente dimostrazione.*

In ogni insieme di n pennarelli, con $n \geq 1$, tutti i pennarelli hanno lo stesso colore. a) Vero per $n = 1$. b) Supponiamo che ogni insieme di $k \geq 1$ pennarelli contenga solo pennarelli dello stesso colore. Consideriamo un insieme Scon $k+1$ pennarelli e, in esso, una coppia di pennarelli, che indichiamo con A e B, scelta a caso. Togliendo da S un pennarello diverso da A e da B, otteniamo un insieme di k pennarelli che contiene A e B: per ipotesi induttiva, tutti questi pennarelli hanno lo stesso colore, e in particolare A e B hanno lo stesso colore. Poiché la coppia A e B era stata scelta a caso, concludiamo che tutti i pennarelli hanno lo stesso colore.

Dobbiamo ricordarci che:
i) se la base induttiva è falsa, allora la nostra tesi è falsa; possiamo, eventualmente, modificarla per controllare se l'affermazione è vera per un differente insieme di valori.
ii) se non riusciamo a dimostrare il passo induttivo, non è detto che la tesi sia falsa: è possibile che qualcun altro (o noi stessi in un giorno diverso) sia capace di farlo, o che la tipologia di dimostrazione non sia adatta alla natura del problema.

4.1) L'affermazione $D(n)$*: il prodotto dei primi n numeri è uguale a 6.* è vera solo per $n = 3$.

4.2) L'affermazione $B(n)$*: ogni poligono piano convesso con n lati ha esattamente n diagonali* è sicuramente falsa per $n = 4$.

4.3) L'affermazione $G(n)$*: ogni numero naturale n è prodotto di numeri primi* è vera per ogni $n \geq 2$, ma non c'è una buona correlazione tra la fattorizzazione in fattori primi di n e di $(n+1)$. È possibile modificare la tecnica del principio di induzione per poter trattare questo caso:

Principio di induzione in forma forte
Supponiamo di voler dimostrare che una affermazione $P(n)$ (dipendente da n) è vera per ogni $n \geq n_0$ (ove n_0 sia un valore prefissato). La tecnica di dimostrazione che si basa sul principio di induzione in forma forte consiste in due passi:
a) **la base induttiva** : si dimostra che l'affermazione è vera quando n coincide con n_0 (cioè per il più piccolo numero a cui siamo interessati).
b) **il passo induttivo** : supponiamo che l'affermazione $P(n)$ sia vera per TUTTI i numeri h tali che $n_0 \leq h \leq k$, e mostriamo che allora è vera anche per il numero successivo $(k+1)$.
Se siamo in grado di svolgere entrambi i passi, allora il principio di induzione assicura che l'affermazione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

In simboli:
Principio di induzione in forma forte
a) **la base induttiva**: mostro che $P(n_0)$ è vero .
b) **il passo induttivo**: mostro che $\{P(h)$ per ogni h tali che $n_0 \leq h \leq k\} \Longrightarrow P(k+1)$.
Deduco che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

4.1) *Verifica che la seguente affermazione è vera per ogni $n \geq 2$: $G(n)$: ogni numero naturale n è prodotto (finito) di numeri primi.*par Applico il principio di induzione in forma forte, per $n_0 = 2$.

a) **base induttiva**: il numero $n_0 = 2$ è un primo, e quindi $G(2)$ è vera.

b) **passo induttivo**: Per ipotesi indutiva, suppongo che ogni numero h compreso tra 2 e k sia prodotto di fattori primi. Considero $(k+1)$. Se $(k+1)$ è primo, non ho nulla da dimostrare. Se, invece, $(k+1)$ non è primo, per definizione deve ammettere un fattore proprio: dunque $k+1 = h \cdot h'$ con h e h' diversi da 1 e $(k+1)$. Per ipotesi induttiva, sia h che h' sono prodotto di fattori primi, e quindi anche $(k+1)$ gode della stessa proprietà.

Deduco che $G(n)$ è vera per ogni $n \geq 2$ (e abbiamo mostrato una parte del teorema fondamentale dell'aritmetica).