7.5 Fasci di coniche

Si consideri un fascio di coniche, cioè un sistema lineare generato da due distinte coniche $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$.
In un riferimento proiettivo fissato, siano $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ l'equazione di $\mathbf{\Gamma}_1$ e $g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\mathbf{B}\mathbf{X} = 0$ l'equazione di $\mathbf{\Gamma}_2$. Ogni conica del fascio ha quindi equazione della forma $\mathbf{X}^t(k\mathbf{A} + h\mathbf{B})\mathbf{X} = 0$.

Mostriamo che *ogni fascio contiene almeno una conica degenere*: se det $\mathbf{A} = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, supponiamo det $\mathbf{A} \neq 0$ e poniamo $t = h/k$; l'equazione det $(\mathbf{A} + t\mathbf{B}) = 0$ è polinomiale di terzo grado in t, ed ammette quindi almeno una radice. Se $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ sono entrambe reali, tale equazione ammette almeno una radice reale. Inoltre, *se un fascio contiene più di tre distinte coniche degeneri, allora ogni conica del fascio è degenere.*
Per ogni punto che non sia comune a $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$, esiste una ed una sola conica del fascio passante per esso.
I punti di intersezione tra $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ sono detti punti base *e appartengono ad ogni conica del fascio. Ogni fascio di coniche possiede almeno un punto base; se i punti base sono più di 4, allora tutte le coniche del fascio hanno una componente comune.*
Infatti, se $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ hanno in comune una componente, tale componente è contenuta in ogni conica del fascio; in particolare, ogni conica di tale fascio risulta essere degenere. Se le due coniche hanno più di 4 punti in comune, devono avere una componente in comune per il Teorema di Bézout. Altrimenti, $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ si intersecano in ameno un punto e in al più 4 punti A, B, C, D (ed esattamente in 4 se vengono contate le molteplicità). Se entrambe le coniche sono reali, tali 4 punti possono essere tutti reali, oppure due reali e due immaginari coniugati, oppure due coppie di punti immaginari coniugati.

Osserviamo che un punto $P(\mathbf{p})$ è un punto doppio sia per $\mathbf{\Gamma}_1$ che per $\mathbf{\Gamma}_2$, allora $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{B}\mathbf{p} = \mathbf{0}$, e P è doppio per tutte le coniche del fascio. I punti base possono quindi essere classificati in semplici o doppi, in base alla definizione seguente:

Definizione 7.5.1. Un punto base si dice *semplice* se esiste almeno una conica del fascio per la quale tale punto è un punto semplice. Il punto base si dice *doppio* se tale punto è un punto doppio per tutte le coniche del fascio.

Se un punto base $P(\mathbf{p})$ è semplice, esiste al più una conica $\mathbf{\Gamma}_P$ del fascio che ha un punto doppio in esso (corrispondente ad una coppia non nulla di valori (h, k) tale che $(k\mathbf{A} + h\mathbf{B})\mathbf{p} = \mathbf{0}$). Se la conica $\mathbf{\Gamma}_P$ esiste, diciamo che P è un *punto base semplice di seconda specie*; in caso contrario, diciamo che P è un *punto base semplice di prima specie*. Mostriamo che *un punto base semplice $P(\mathbf{p})$ è semplice di seconda specie se e solo se tutte le coniche del fascio, diverse da $\mathbf{\Gamma}_P$, hanno la stessa tangente in P.*
Supponiamo, infatti, che P sia semplice di seconda specie; possiamo supporre che P sia doppio per $\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{\Gamma}_P$ e sappiamo che $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{0}$. L'equazione della tangente in P a $\mathbf{\Gamma}_2$ è data da $\mathbf{p}^t\mathbf{B}\mathbf{X} = 0$, che è uguale a $\mathbf{p}^t(\mathbf{A} + k\mathbf{B})\mathbf{X} = 0$ per ogni k e coincide con le tangenti alle altre coniche del fascio.
Viceversa, supponiamo che due coniche distinte del fascio abbiano la stessa retta tangente in un punto base semplice $P(\mathbf{p})$. Possiamo supporre che $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ siano le due coniche distinte che hanno la stessa retta tangente in P, e ne ricaviamo che $\mathbf{p}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{p}^t\mathbf{B}\mathbf{X} = 0$ (per una opportuna scelta delle matrici associate) e $\mathbf{p}^t(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{0}$. Il punto P risulta essere doppio per la conica del fascio di matrice $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ e quindi $P(\mathbf{p})$ è un punto base semplice di seconda specie.

Dal ragionamento precedente, segue che *se P è un punto base semplice di prima specie, allora tutte le coniche del fascio hanno in P un punto semplice, e le tangenti sono tutte distinte.*

Sia ora $P(\mathbf{p})$ un punto base del fascio, semplice o doppio, e sia r una retta per P. Al variare di h, k in $\mathbb{K}$ non entrambi nulli, denotiamo con $m_{(k,h)}$ la molteplicità di intersezione tra r e la conica $\mathbf{\Gamma}_{(k,h)}$ di matrice $k\mathbf{A} + h\mathbf{B}$; se r è una componente di $\mathbf{\Gamma}_{(k,h)}$, si pone $m_{(k,h)} = +\infty$. Supponiamo che r non sia una componente comune a tutte le coniche del fascio, e denotiamo con m_p il minimo tra i valori $m_{(k,h)}$, al variare di $(k, h) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K} \setminus \{(0, 0)\})$.

Proposizione 7.5.2. *a) Siano $P(\mathbf{p})$ un punto base del fascio e sia r una retta per P che non sia una componente comune a tutte le coniche del fascio. Allora esiste una sola conica $\mathbf{\Gamma}_{(k,h)}$ del fascio per la quale $m_{(k,h)} > m_p$.*
b) Se s è una retta che non passa per nessuno dei punti base e non è componente delle coniche del fascio, esistono due coniche (eventualmente coincidenti) del fascio che intersecano s in un unico punto (con molteplicità 2).

Dimostrazione. a) Supponiamo che P sia semplice di prima specie, e dimostriamo che nel fascio c'è una unica conica tangente a r in p: questo fatto segue imponendo che l'equazione della tangente in P alla conica $\mathbf{\Gamma}_{(k,h)}$ coincida con l'equazione di r e osservando che tale condizione è lineare in (k, h).
Se P è un punto semplice di seconda specie, l'affermazione è già stata dimostrata nel caso in cui r non coincida con la tangente comune alle coniche che non hanno punto doppio in P; se, invece, r coincide con la tangente comune, basta osservare che esiste una unica conica del fascio che ha come componente la retta r: è la conica che si ottiene imponendo il passaggio per un punto di r diverso da P.
Se, P è un punto doppio, si ragiona in modo analogo, mostrando che esiste una unica conica del fascio che ha come componente la retta r.
b) Si consideri una equazione parametrica della retta s e la si sostituisca nell'equazione di $\mathbf{\Gamma}_{(k,h)}$: si ottiene una equazione quadratica nei parametri di s, i cui coefficienti dipendono linearmente da (k, h); poichè s non è contenuta in tutte le coniche del fascio, la condizione affinchè l'intersezione tra s e $\mathbf{\Gamma}_{(k,h)}$ sia composta da un unico punto è l'annullamento del discriminante; poichè il discriminante è una equazione omogenea quadratica in (k, h), si ottiene la tesi. □

Riprendiamo lo studio delle coniche degeneri contenute nel fascio, per ricavare una classificazione dei fasci di coniche.
a) Se il fascio ha infiniti punti base, allora tutte le coniche del fascio sono degeneri e contengono una stessa retta come componente. Le coniche del fascio sono dunque composte dalla componente comune e da una seconda componente, che varia tra le rette di un fascio avente centro in un punto Z, che può appartenere o no alla componente comune.
b) Se il fascio contiene due coniche degeneri $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ e i quattro punti base A, B, C, D sono tra loro distinti, esistono esattamente tre coniche degeneri nel fascio: la conica di componenti $A \vee B$ e $C \vee D$, quella di componenti $A \vee C$ e $B \vee D$ e quella di componenti $A \vee D$ e $B \vee C$. Se le coniche sono reali, tutte e tre le coniche degeneri sono reali solo se tutti e quattro i punti base sono reali; altrimenti, una sola delle coniche degeneri è reale. In ogni caso, sono reali i punti doppi di ciascuna delle tre coniche degeneri:

$$S = (A \vee B) \cap (C \vee D) \qquad T = (A \vee C) \cap (B \vee D) \qquad V = (A \vee D) \cap (B \vee C)$$

Il triangolo di vertici S, T e V è un triangolo autopolare per tutte le coniche non degeneri del fascio. Il fascio di coniche coincide con l'insieme delle coniche passanti per quei quattro punti (diciamo anche che sono tutte le coniche circoscritte al quadrangolo di vertici A, B, C, D). In particolare, tutti i punti base sono semplici.
c) Se il fascio contiene due coniche degeneri $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ che hanno tre punti in comune, tali coniche sono di rango 2; esse hanno punti doppi distinti e una delle due contiene il punto doppio A dell'altra, che costituisce un punto base semplice di seconda specie. I rimanenti punti base sono semplici di prima specie. Il fascio è detto *fascio di coniche tangenti*.
d) Se il fascio contiene due coniche degeneri $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ che hanno due punti in comune, una di esse ha rango 1, mentre l'altra ha rango 2 e il suo punto doppio appartiene alla prima. I due punti base sono semplici di seconda specie. Il fascio è detto *fascio di coniche bitangenti*.
e) Se il fascio contiene due coniche degeneri $\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{\Gamma}_2$ che hanno un unico punto in comune, tale punto è doppio per ciascuna delle due coniche, e quindi è doppio per tutte le coniche del fascio.
f) Se il fascio contiene una unica conica degenere $\mathbf{\Gamma}_1$, non può avere più di 2 punti base. Se $\mathbf{\Gamma}_1$ ha rango 2, i punti base sono esattamente 2, entrambi semplici, ma uno di prima e uno di seconda specie.
g) Se il fascio contiene una unica conica degenere $\mathbf{\Gamma}_1$ di rango 1, c'è un solo punto base, che è semplice di seconda specie. La tangente comune alle coniche non degeneri del fascio è la componente di $\mathbf{\Gamma}_1$.