ESERCIZI DI RIPASSO, A.A. 14-15

Per ogni risposta, segnare V se è vera, F se è falsa. Ogni test viene valutato 3 punti se vengono date tutte e sole le risposte corrette. Altrimenti, la valutazione è 0.
Le coordinate dei punti e i vettori numerici sono scritti come vettori righe.

I test sono organizzati in modo che un gruppo da 10 test fornisca quesiti suddivisi tra ampie parti del programma.

Test 1. Nel piano euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. La retta r di equazione $3x_1 - (2+i)x_2 - i + 1 = 0$:
V F (a) è parallela alla retta $(3+3i)x_1 + (-3i-1)x_2 + i + 2 = 0$;
V F (b) è ortogonale alla retta $(2+i)x_1 - 3x_2 = 0$;
V F (c) contiene un unico punto reale.

Test 2. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera i piani α di equazioni $x_1 - 2x_3 - 1 + 2i = 0$ e β di equazione $ix_2 + ix_3 - 2i + 2 = 0$.
V F (a) l'intersezione di α e β è una retta;
V F (b) l'intersezione di α e β contiene almeno un punto reale;
V F (c) l'intersezione di α e β è contenuta nel piano di equazione $x_1+x_2-x_3-3 = 0$.

Test 3. Considera la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ definita da

$$\varphi[x_0, x_1, x_2] = [-4x_0 - 6x_1 + 3x_2, 3x_0 + 5x_1 - 3x_2, -x_2].$$

V F (a) il punto $P[-1, 1, 0]$ è fisso per φ;
V F (b) una unica retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è formata da punti fissi per φ;
V F (c) I punti fissi di φ sono contenuti in una unica retta.

Test 4. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^5$, considera il sottospazio W di equazioni $x_1 - x_2 + x_5 = 0, x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.
V F (a) V/W ha dimensione 3;
V F (b) le classi $[\mathbf{e}_4]$, $[\mathbf{e}_5]$ formano una base di V/W.
V F (c) l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_3 - x_5, 2x_1 - x_2 + x_3)$$

fattorizza attraverso la proiezione canonica $p : V \to V/W$.

Test 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, considera la base $\mathcal{B}$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,0)$ e U il sottospazio generato da $\mathbf{v}_3$. Denota con $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e con $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$ la base duale.

V F (a) $(-e_1^* + e_2^* + 2e_3^*)(\mathbf{v}_1) = 1$;
V F (b) l'annullatore di U ha dimensione 2;
V F (c) la base duale di $\mathcal{B}$ contiene $\varphi = -e_1^* + e_2^* + e_3^*$.

Test 6. Considera l'inclusione del piano affine reale nel piano proiettivo numerico reale data da $(x,y) \mapsto [1,x,y]$. Considera la retta r di equazione $3x + 4y - 2 = 0$.

V F (a) la parte affine della retta proiettiva di equazione $5x_0 - 3x_1 + 4x_2 = 0$ è parallela ad r;
V F (b) il completamento proiettivo di r ha equazione omogenea $3x_0 + 4x_1 - 2x_2 = 0$;
V F (c) esiste almeno una affinità non identica che ha r come luogo dei punti fissi.

Test 7. Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e la conica Γ di equazione $9x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_0x_1 - 12x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0$.

V F (a) la conica Γ contiene una retta passante per $[0,1,2]$;
V F (b) la conica Γ ha rango 1 e contiene la retta di equazione $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$;
V F (c) il punto $P[0,-1,2]$ è doppio per Γ.

Test 8. Nel piano euclideo complessificato, sia γ la conica $x^2+4y^2-4x-8y+4 = 0$:

V F (a) γ è una conica a centro non degenere;
V F (b) la retta polare dell'origine rispetto a γ è parallela a $x + 2y = 0$.
V F (c) i punti $A(0,1)$ e $B(1,1)$ sono vertici di γ.

Test 9. Nel piano euclideo complessificato sia fissato un riferimento monometrico ortonormale reale. La conica di equazione $x^2 + 2txy + y^2 + t = 0$ (con $t \in \mathbf{R}$):

V F (a) è non degenere se $t \neq \pm 1$;
V F (b) per $t < -1$ è una iperbole;
V F (c) è una ellisse a punti reali se e solo se $-1 < t < 0$.

Test 10. Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita ponendo $\varphi(A,B)$ la traccia del prodotto AB .

V F (a) φ è una applicazone bilineare;
V F (b) φ è definita positiva;
V F (c) φ ammette vettori isotropi non nulli.

Test 11. Nel piano euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera il punto $P(2+i, 1-2i)$.

V F (a) la retta $x - 2y - 3i = 0$ passa per P ed è ortogonale ad una retta reale;
V F (b) una opportuna retta isotropa per P contiene anche il coniugato $\overline{P}$;
V F (c) Ogni retta reale per P contiene il punto $Q(2, 1)$.

Test 12. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta r di equazioni

$$x_1 + ix_3 - 1 = 0, x_1 - (1+i)x_3 - 1 = 0.$$

V F (a) la retta r e la sua coniugata $\overline{r}$ non hanno punti in comune;
V F (b) esiste un unico piano reale passante per l'origine e parallelo a r e $\overline{r}$;
V F (c) esiste almeno una retta isotropa ortogonale a r.

Test 13. Considera la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ definita da

$$\varphi[x_0, x_1, x_2] = [9x_0 + 2x_1 - 3x_2, -4x_0 + x_1 + 2x_2, 12x_0 + 4x_1 - 3x_2].$$

V F (a) la retta passante per $P[1, 0, 2]$ e $Q[1, -1, 1]$ è globalmente fissa per φ;
V F (b) il fascio di rette di centro $S[1, -1, 2]$ è globalmente fissato da φ;
V F (c) tre rette del fascio di centro $P[1, 0, 2]$ sono globalmente fissate da φ.

Test 14. Nello spazio vettoriale V delle matrici quadrate a coefficienti reali e di ordine 2, considera il nucleo W dell'endomorfismo f di V definito da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a-b & 4a-2b \\ c+2d & 2c+4d \end{pmatrix}.$$

V F (a) V/W ha dimensione 3;
V F (b) le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rappresentano la stessa classe in V/W;
V F (c) l'applicazione $f : V/W \to \mathbb{R}^2$ definita da $f([A]) = (2a-b, c+2d)$ (ove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$) è ben definita e suriettiva,

Test 15. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^3$, considera la retta r per $A[1,1,0,1]$ e $B[2,0,1,1]$. Siano $[u_0,u_1,u_2,u_3]$ le coordinate duali nello spazio proiettivo duale.

V F (a) il piano di $\mathbb{P}^3$ di equazione $x_0+2x_2-x_3=0$ contiene la retta r;
V F (b) il sottospazio duale di r è contenuto nel piano dello spazio duale di equazione $u_0+u_1+u_3=0$;
V F (c) il sottospazio duale di r contiene il punto dello spazio duale di coordinate duali $[1,1,0,1]$.

Test 16. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^5$, considera i punti $A[1,0,0,1,1,3]$, $B[0,0,1,1,1,1]$, $C[2,1,-1,0,0,0]$ e il sottospazio congiungente $U=A\vee B\vee C$.

(a) la stella di iperpiani per U ha dimensione proiettiva 2;
(b) per ogni iperpiano H di $\mathbb{P}^5$, l'intersezione di H con U contiene una retta;
(c) esiste una unica proiettività di $\mathbb{P}^5$ in sè per la quale U è puntualmente fisso.

Test 17. Considera l'inclusione del piano affine nel piano proiettivo numerico data da $(x,y)\mapsto[1,x,y]$. Considera inoltre la retta r di equazione $6x-2y-5=0$.

V F (a) la parte affine della retta proiettiva di equazione $11x_0+3x_1-2x_2=0$ è parallela ad r;
V F (b) il completamento proiettivo di r ha equazione omogenea $5x_0+6x_1-2x_2=0$;
V F (c) il punto improprio di r è $[0,1,3]$.

Test 18. Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee $[x_0,x_1,x_2]$ e la conica Γ di equazione $x_2^2+x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2=0$.

V F (a) la conica Γ contiene la retta di equazione $x_0+x_1=0$;
V F (b) la conica Γ ha rango 2;
V F (c) il punto $P[1,-1,0]$ è doppio per Γ.

Test 19. Nel piano euclideo, la conica di equazione $x^2-2xy-4y-3=0$:

V F (a) è una ellisse con centro $(-2-2)$;
V F (b) è una iperbole con centro $(-2-2)$;
V F (c) ha per asintoto la retta $x=-2$.

Test 20. Nel piano euclideo, la conica di equazione $x^2-4y^2-2=0$:

V F (a) è una conica non degenere;
V F (c) è tangente alla retta di equazione $x=1$.
V F (d) ha per diametro la retta $x-4y=0$.

Test 21. Nel piano euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera il punto $P(1-i, 2i)$.

V F (a) una retta isotropa per P contiene un punto reale;
V F (c) esiste una retta reale per P;
V F (b) la retta passante per per P e parallela alla retta $(2+i)x - iy = 0$ contiene il punto $Q(3-i, 2+2i)$;

Test 22. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta r passante per $P(i, 1-i, 3i)$ e ortogonale al piano $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

V F (a) la retta r e la sua coniugata sono incidenti;
V F (b) esiste una unica retta reale ortogonale a r e passante per P;
V F (c) esiste un unico piano reale parallelo a r e passante per l'origine.

Test 23. Considera la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ definita da

$$\varphi[x_0, x_1, x_2] = [-4x_0 + 3x_1 - 2x_2, -3x_1, -x_0 + 3x_1 - 5x_2].$$

V F (a) il punto $P[1, 1, 1]$ e il punto $Q[1, 0, 1]$ sono fissi per φ;
V F (b) la retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ per P e per $U_1[0, 1, 0]$ è globalmente fissa per φ;
V F (c) φ ha esattamente tre punti fissi.

Test 24. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^5$, considera il sottospazio W di equazioni $x_1 - x_2 + x_5 = 0, 2x_1 - x_2 + x_4 = 0$.

V F (a) V/W ha dimensione 2;
V F (b) le classi $[\mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_4]$ sono linearmente dipendenti in V/W.
V F (c) l'applicazione $f : V \to V$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2 + x_5, 0, 0, x_1 + x_4 - x_5, 0)$ induce una applicazione sul quoziente $\overline{f} : V/W \to V/W$ definita da $\overline{f}([(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)]) = [f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)]$.

Test 25. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^4$, considera la proposizione *il sottospazio congiungente tre punti non allineati ha codimensione 2.* La proposizione duale è equivalente a

V F (a) *l'intersezione di tre iperpiani a due a due distinti ha dimensione 2*;
V F (b) *se tre iperpiani contengono una stessa retta, la loro intersezione ha dimensione duale 2*;
V F (c) *se tre iperpiani non appartengono allo stesso fascio, si intersecano in un sottospazio di dimensione 1* .

Test 26. Considera l'inclusione del piano affine nel piano proiettivo numerico data da $(x, y) \mapsto [1, x, y]$. Considera inoltre la retta r di equazione $3x - 2y - 1 = 0$.

V F (a) la parte affine della retta proiettiva di equazione $3x_0 - 2x_1 - x_2 = 0$ è parallela ad r;
V F (b) il completamento proiettivo di r ha equazione omogenea $-x_0 + 3x_1 - 2x_2 = 0$;
V F (c) il birapporto di $A(0, 2)$, $B(0, -1)$, $C(0, -3)$, $D(0, 1)$ è $[5, -1]$.

Test 27. Sia γ la circonferenza di centro il punto $(1, -1)$ e passante per l'origine:

V F (a) γ ha equazione $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$;
V F (c) la retta tangente a γ nell'origine ha equazione $x + y = 0$.
V F (d) il parallelogramma di vertici l'origine e i due punti di intersezione di γ con gli assi x e y è un quadrato.

Test 28. Nel piano euclideo complessificato, la conica di equazione

$$x^2 + y^2 + 6xy + \frac{1}{\sqrt{2}}16x = 0$$

V F (a) è una iperbole con centro $(1, -3)$;
V F (b) è una iperbole e un suo asse di simmetria è parallelo ad una bisettrice degli assi;
V F (c) ha un asintoto che passa per il punto $A(0, 2)$.

Test 29. Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e la conica Γ di equazione $2x_0^2 + 3x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_0x_1 + 7x_0x_2 + 11x_1x_2 = 0$.

V F (a) la conica Γ contiene la retta passante per $[0, 3, -1]$ e per $[2, 1, 0]$;
V F (b) la conica Γ ha rango 2;
V F (c) il punto $A[7, 1, -5]$ è doppio per Γ.

Test 30. In $V = \mathbb{R}^3$, si considerino la forma quadratica $\Phi(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3$ e il prodotto scalare φ associato:

V F (a) Φ è non degenere e semidefinita positiva;
V F (c) il sottospazio ortogonale al vettore $(0, 0, 1)$ ha dimensione 2;
V F (d) esiste un sottospazio isotropo per φ di dimensione 2.