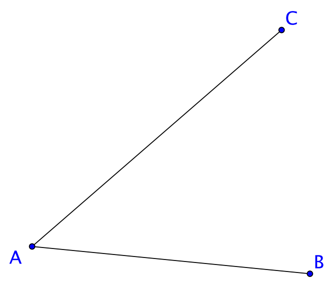
Proposizione I.9

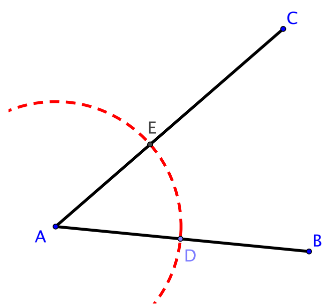
E' possibile dividere in due parti uguali un qualsiasi angolo (rettilineo) assegnato (diremo che è possibile bisecare l'angolo).

Dimostrazione

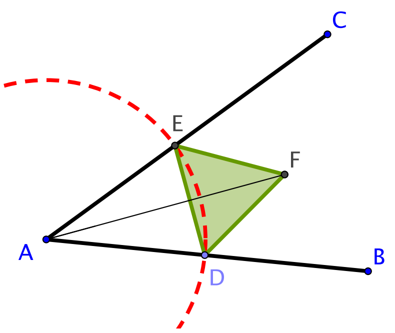
Sia BAC un angolo rettilineo assegnato.



Si fissi un punto D su AB, e un punto E su AC in modo tale che AD=AE [I.3]

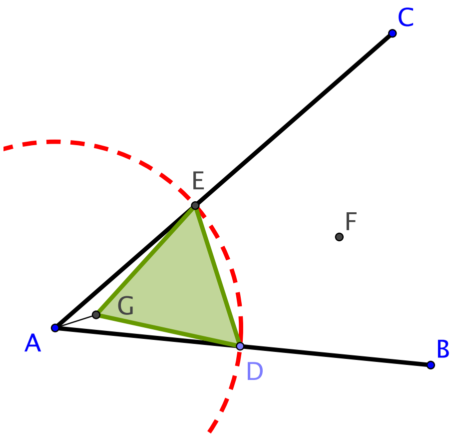


Si congiunga D con E [post. 1] e si costruisca un triangolo equilatero DEF di lato DE [I.1] Si congiunga A con F [post . 1]

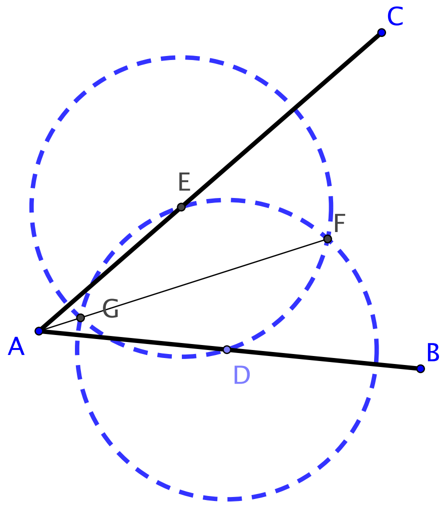


Dimostriamo ora che AF divide a metà l'angolo BAE, cioè BAF = FAE.
Consideriamo il triangolo AED: in esso, AE=AD per costruzione. Per la prop. I.5, gli angoli alla base AED e ADE sono uguali. Analogamente, poiché il triangolo DFE è equilatero (e quindi EF=FD), l'angolo EFD è uguale all'angolo FDE.
Supponiamo che il triangolo equilatero sia disposto come in figura. Poiché, per le nozioni comuni, sommando cose uguali si ottengono cose uguali tra loro, l'angolo AEF=AED+DEF risulta uguale all'angolo ADF= ADE+EDF.
Consideriamo ora i triangoli AFE e ADF. In essi, AE=AD per costruzione, AF è in comune.
Inoltre l'angolo AEF compreso tra AE e EF coincide con l'angolo ADF compreso tra AD e DF (come appena dimostrato). Per l'assioma LAL, concludiamo che i triangoli AFE e ADF sono congruenti. In particolare, ricaviamo che l'angolo EAF è uguale all'angolo FAD (come volevamo.
[osserviamo, inoltre, che l'angolo EFA è uguale all'angolo AFD: dunque, il segmento AF risulta bisettrice anche dell'angolo EFD del triangolo equilatero.] Q.E.F.

Esercizio 1. Completa la dimostrazione nel caso il triangolo equilatero sia disposto come nella figura.



Esercizio 2. Dimostra che i punti A, G, F sono allineati, cioè i segmenti AG e AF sono uno contenuto nell'altro.



Esercizio 3. Dividi l’angolo in figura in 4 e in 8 parti uguali.