Mentre esiste una crescente e positiva tendenza a studiare ed insegnare le scienze nella loro dimensione storica, per quanto riguarda la matematica la situazione italiana si presenta estremamente debole per mancanza di testi aggiornati ed esaurienti. Nella prefazione a quest'opera, Lucio Lombardo Radice scrive: « Questa preziosa opera di C.B. Boyer è invece completa, sufficientemente analitica per soddisfare le esigenze di chi vuole andare abbastanza a fondo, anche dal punto di vista tecnico, e nello stesso tempo sufficientemente sintetica per risultare leggibile anche a chi "tecnico della matematica" non è. Il Boyer si preoccupa, in apertura di ogni periodo storico e di ogni argomento, di mettere in chiara luce le idee che "stanno sotto" agli sviluppi tecnici, esponendole in modo accessibile a chi abbia una cultura di livello liceale; a tale scopo, impiega in modo brillante "descrizioni semplici" (esempi e controesempi) per illustrare "concetti difficili". Successivamente, approfondisce alcuni aspetti anche tecnici, rendendo così possibili due livelli di lettura, per due tipi di lettore ».

C. B. Boyer vive e lavora negli Stati Uniti, dove dal 1953 è professore al Brooklyn College; è autore di « The Concepts of the Calculus » (1939), « History of Analytic Geometry » (1956) e « The Rainbow - From Myth to Mathematics » (1959).

0017790–7

In copertina: Frank Kupka,
"Piani diagonali", 1931
Parigi, Galleria Louis Carré

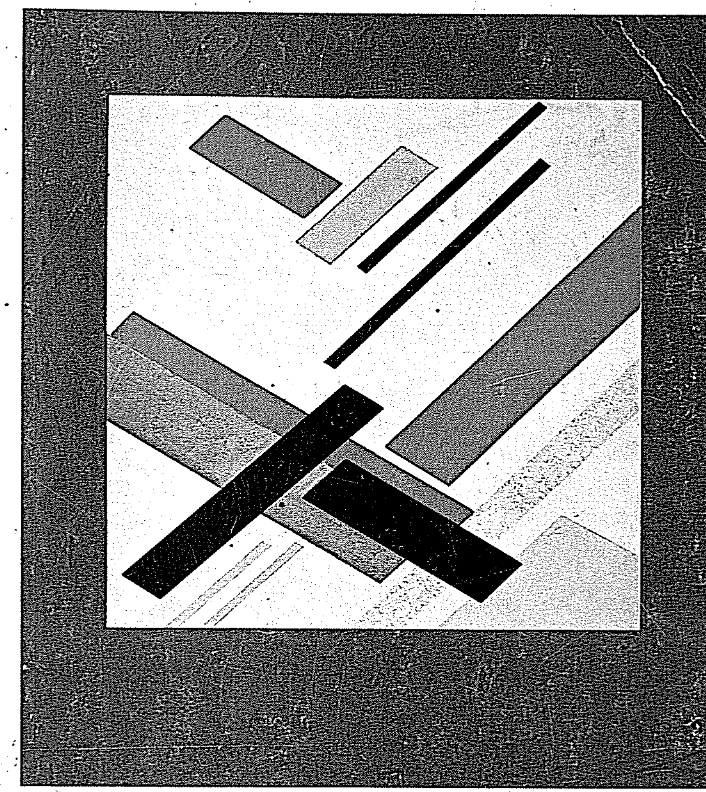
17790-7

OS 76

CARL B. BOYER • STORIA DELLA MATEMATICA

OSCAR MONDADORI

Carl B. Boyer
Storia della matematica



Oscar Studio Mondadori

Bibliografia

BELL E.T., *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York, 1937, (trad. it. *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze, 1966).

BOLZANO B., *Paradoxes of the Infinite*, trad. di D.A. Steele, Routledge & Kegan Paul, Londra, 1950.

BONCOMPAGNI B., "La Vie et les travaux du Baron Cauchy ... par C.-A. Valson", in *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, **2**, 1896, pp. 1-95.

BOYER C.B., *Concepts of the Calculus*, Dover, New York, 1959.

BRILL A. e NOETHER M., "Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer and neuerer Zeit", in *Jahresbericht, Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, **3**, 1892-1893, pp. 107-566.

DUNNINGTON G.W., *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science; A Study of His Life and Work*, Exposition Press, New York, 1955.

GAUSS C.F., *Werke*, Lipsia, 1866-1933, 12 voll.

GAUSS C.F., *Inaugural Lecture on Astronomy and Papers on the Foundations of Mathematics*, trad. di G.W. Dunnington, Louisiana State University, Baton Rouge, La, 1937.

GAUSS C.F., *Theory of the Motion of Heavenly Bodies*, Dover, New York, 1963.

GAUSS C.F., *General Investigations of Curved Surfaces*, trad. di A. Hiltebeitel e J. Morehead, Raven Press, New York, 1965.

GAUSS C.F., *Disquisitiones arithmeticae*, trad. inglese di A.A. Clarke, Yale University Press, New Haven, Conn., 1966.

JOURDAIN P.E.B., "The Theory of Functions with Cauchy and Gauss", in *Bibliotheca Mathematica*, (3), **6**, 1905, pp. 190-207.

JOURDAIN P.E.B., "The Origin of Cauchy's Conceptions of a Definite Integral and of the Continuity of a Function", in *Isis*, **1**, 1913, pp. 661-703.

KLEIN F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlino, Springer, 1926-1927, 2 voll.

MERZ J.T., *A History of European Thought in the Nineteenth Century*, Edimburgo e Londra, 1896-1914, 4 voll.; Dover, New York, 1965.

MUIR T., *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, Londra, 1906-1930, 4 voll. e supplemento, ristampa, Dover, New York, 1960.

PIERPONT J., "Mathematical Rigor, Past and Present", in *Bulletin, American Mathematical Society*, **34**, 1928, pp. 23-53.

PRINGSHEIM A. e MOLK J., "Principes fondamentaux de la théorie des fonctions", in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Vol. II, parte I, fascicolo 1.

REICHARDT H., a cura di, *C.F. Gauss. Leben und Werk*, Gauss Gedenkband, Haude & Spener, Berlino, 1960.

SARTON G., *The Study of the History of Mathematics*, Cambridge, Mass., 1936, ed. in paperback, Dover, New York, 1957.

SCHAAF W.L., *Carl Friedrich Gauss*, Watts, New York, 1964.

SMITH D.E., *Source Book in Mathematics*, ristampa Dover, New York, 1958, 2 voll.

STOLZ O., "B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung", in *Mathematische Annalen*, **18**, 1881, pp. 255-279.

VALSON C.-A., *La Vie et les travaux du baron Cauchy*, con prefazione di M. Hermite, Parigi, 1868, Vol. I.

24
L'Età eroica della geometria

1 Fra tutte le branche della matematica, la geometria è quella che più di ogni altra è andata soggetta ai mutamenti del gusto da un'epoca all'altra. Nella Grecia antica essa aveva raggiunto il suo apice, per poi precipitare al suo punto più basso al tempo della caduta dell'Impero Romano; ricuperò parte del terreno perduto presso gli arabi e nell'Europa del Rinascimento. Nel XVII secolo la geometria si presentava alla soglia di una nuova epoca, ma doveva però venire quasi dimenticata, per lo meno dai matematici votati alla ricerca, per quasi altri due secoli, rimanendo in uno stato di torpore, messa in ombra dalle nuove branche dell'analisi in continuo sviluppo. L'Inghilterra, specialmente negli ultimi decenni del XVIII secolo, aveva combattuto una battaglia perduta con il suo tentativo di ridare agli *Elementi* di Euclide quella posizione gloriosa che essi avevano avuto un tempo, ma i matematici inglesi fecero ben poco per fare progredire le ricerche in questo campo. Attraverso gli sforzi di Monge e di Carnot, vi furono reviviscenze di geometria pura nel periodo della Rivoluzione Francese, ma la riscoperta quasi esplosiva della geometria come branca vitale della matematica venne fatta principalmente agli albori del XIX secolo. Come ci si sarebbe potuto aspettare, l'École Polytechnique ebbe la sua parte in questo movimento: infatti il noto teorema di Brianchon fu scoperto da uno studente e pubblicato nel 1806 sul *Journal de l'École Polytechnique*. Charles Julien Brianchon (1785-1864) frequentava l'École da appena un anno, seguendo i corsi di Monge e leggendo la *Géometrie de position* di Carnot. Lo studente ventunenne, che doveva poi diventare ufficiale di artiglieria e insegnante di matematica, innanzitutto rimise in luce il teorema di Pascal da lungo dimenticato, riformulandolo in forma moderna: in un esagono inscritto in una sezione conica, i tre punti di intersezione dei lati opposti giacciono sempre su una retta. Continuando, poi, attraverso altre gonabile ad Apollonio nei tempi antichi. Steiner nacque in Svizzera, ma ricevette la sua educazione a Heidelberg e a Berlino, e con l'appoggio di Jacobi ottenne in quest'ultima università una cattedra, che occupò sino alla morte. Nelle sue mani la geometria sintetica fece progressi paragonabili a quelli realizzati fino allora dall'analisi. Emulò Abel nella quantità di articoli pubblicati sul *Journal* di Crelle. Il suo nome è legato a numerosi risultati matematici, tra cui le proprietà dei cosiddetti punti di Steiner: se si uniscono in tutti i modi possibili i sei punti dell'esagono iscritto in una conica (*hexagramme mystique* di Pascal), si ottengono sessanta rette di Pascal che si intersecano a tre a tre in venti punti, detti punti di Steiner. Steiner dimostrò anche che tutte le costruzioni della geometria euclidea possono venire effettuate con l'uso della sola riga, purché si sia già tracciato un solo cerchio. Aveva una connaturata antipatia per i metodi analitici, e usando soltanto metodi sintetici riuscì a dimostrare, in una memoria pubblicata sul *Journal* di Crelle, un notevole teorema che sembra appartenere per natura al campo dell'analisi: ossia, il teorema che dice che una superficie di terzo ordine contiene soltanto ventisette rette.

La storia della geometria del XIX secolo presenta moltissimi esempi di riscoperte indipendenti, e Steiner fu protagonista di numerosi casi del genere. Nel 1822 Poncelet, traendo ispirazione dalle ricerche di Mascheroni, aveva suggerito l'ipotesi che tutte le costruzioni della geometria piana euclidea potessero venire effettuate con una riga se oltre ad essa si tracciava nel piano soltanto una circonferenza e se ne fissava il centro. Questo teorema, che, come abbiamo visto, fu dimostrato da Steiner, mostra che nella geometria euclidea è impossibile fare completamente a meno del compasso, ma che, dopo averlo usato per tracciare una sola circonferenza, si può metterlo da parte e continuare a usare soltanto la riga; similmente a quanto aveva fatto Mascheroni, usando soltanto compassi[4].

Steiner assomigliava un po' a Gauss perché nuove idee e scoperte si affollavano così rapidamente nella sua mente da non aver il tempo di elaborarle ed esporle con ordine per iscritto. Fin dal 1824 aveva scoperto la trasformazione geometrica nota come geometria di inversione per raggi vettori reciproci che portò a tanti notevoli risultati[5]. Se due punti P e P' giacciono su una semiretta che ha origine nel centro O di un cerchio C di raggio $r \neq 0$, e se il prodotto delle distanze OP e OP' è r^2, P e P' si dicono l'uno l'inverso dell'altro rispetto al cerchio C. A ogni punto P' esterno al cerchio corrisponde un punto P all'interno del

[4] Ulteriori particolari si trovano in HOWARD EVES, *An Introduction to the History of Mathematica*, rev. ed., New York, Holt, 1964, pp. 99-100.

[5] Si veda N.A. COURT, "Notes on Inversion", *The Mathematics Teacher*, 55, 1962, pp. 655-657.

cerchio. Ma poiché non esiste nessun punto esterno P' corrispondente a P quando P coincide con il centro O, si ha in un certo senso un paradosso simile a quello di Bolzano: l'interno di ogni cerchio, per quanto piccolo, contiene, per così dire, un punto in più rispetto ai punti contenuti nella porzione del piano che si trova al di fuori del cerchio. In maniera esattamente analoga si può facilmente definire l'inverso di un punto dello spazio tridimensionale rispetto a una sfera.

Moltissimi sono i teoremi della geometria di inversione piana o spaziale che si possono facilmente dimostrare sia con metodi analitici, sia con metodi sintetici. In particolare, è facile mostrare che una circonferenza non passante per il centro di inversione si trasforma, mediante una inversione piana, in una circonferenza; mentre una circonferenza passante per il centro di inversione si trasforma in una retta non passante per il centro di inversione. Analoghi risultati si ottengono per quanto riguarda le sfere e i piani di inversione della geometria di inversione tridimensionale. Un po' più difficile da dimostrare è il risultato, molto più significativo, che l'inversione è una trasformazione conforme, ossia che in questa geometria gli angoli compresi tra curve si conservano immutati. Trasformazioni che conservano gli angoli sono tutt'altro che comuni, come appare evidente da un teorema dimostrato da Joseph Liouville, secondo il quale nello spazio le sole a essere conformi sono le inversioni e le trasformazioni di similitudine e di congruenza[6]. Steiner non pubblicò nulla intorno al suo nuovo concetto di inversione, e questo tipo di trasformazione venne più volte riscoperto da altri matematici nel corso del secolo, tra i quali ricordiamo Lord Kelvin (o William Thomson, 1824-1907), il quale vi giunse attraverso la fisica e la applicò a problemi di elettrostatica.

Se il centro O della circonferenza di inversione di raggio a coincide con l'origine di un sistema di coordinate cartesiane del piano, le coordinate x' e y' del punto P' che è l'inverso del punto $P(x, y)$ sono date dalle equazioni

$$x' = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}$$

Più tardi queste equazioni suggerirono a Luigi Cremona (1830-1903), che fu professore di geometria successivamente a Bologna, a Milano e a Roma, lo studio della trasformazione molto più generale $x' = R_1(x, y)$, $y' = R_2(x, y)$, dove R_1 e R_2 sono funzioni algebriche razionali. Tali trasformazioni, di cui quelle di inversione sono soltanto un caso particolare, sono oggi note come trasformazioni di Cremona, come riconoscimento per colui che nel 1863 ne diede una esposizione sistematica e più tardi le generalizzò estendendole allo spazio tridimensionale.

[6] D.J. STRUIK, "Outline of a History of Differential Geometry", *Isis*, 19, 1933, 92-120; 20, 1933, 161-191.

3 Una delle caratteristiche principali della geometria della seconda metà del XIX secolo fu l'entusiasmo con cui i matematici si dedicarono a una vasta varietà di trasformazioni. Fra i tipi di trasformazione più noti ve n'era un gruppo che formava quella che oggi viene chiamata geometria proiettiva. Intuizioni di una geometria del genere si potevano già rintracciare nei lavori di Pascal e di Desargues, ma soltanto all'inizio del XIX secolo si iniziò uno studio sistematico di questo tipo di geometria, soprattutto a opera di Poncelet. Durante gli anni di prigionia in Russia (1813-1814), Poncelet aveva composto un trattato di geometria analitica, *Applications d'analyse et de géométrie*, basato sui principi da lui appresi all'École Polytechnique. Quest'opera vide, però, la luce soltanto mezzo secolo più tardi (fu pubblicata in due volumi, usciti rispettivamente nel 1862 e nel 1864), nonostante che fosse originariamente destinata a servire da introduzione all'altra opera più celebre del medesimo autore, il *Traité des propriétés projectives des figures* del 1822. Quest'ultima opera differiva nettamente dalla precedente per il fatto di seguire un metodo di esposizione sintetico, anziché analitico. Le scelte di Poncelet erano cambiate dopo il suo ritorno a Parigi, e da allora in poi egli fu sempre un accanito difensore dei metodi sintetici. Egli si era reso conto che i vantaggi della geometria analitica consistevano nella sua generalità: pertanto si sforzò di dare agli enunciati della geometria sintetica una formulazione che fosse la più generale possibile. Per realizzare questo suo proposito formulò quello che egli stesso chiamò "principio di continuità" o "principio di permanenza delle relazioni matematiche", da lui enunciato in questi termini:

> Le proprietà metriche scoperte in rapporto a una figura originaria rimangono applicabili, senza altre modificazioni che quelle di cambiamento di segno, a tutte le figure correlative che si possono considerare originate dalla prima.

Come esempio di tale principio Poncelet citava il teorema della uguaglianza dei prodotti dei segmenti di corde intersecantisi in un cerchio, la quale diventa, quando il punto di intersezione si trova al difuori del cerchio, una uguaglianza dei prodotti dei segmenti delle secanti. Se una delle rette è tangente alla circonferenza, il teorema continua nondimeno a essere valido sostituendo il prodotto dei segmenti della secante con il quadrato della tangente. Cauchy considerava con scherno il principio di continuità di Poncelet, perché gli sembrava nient'altro che un'azzardata induzione. In un certo senso questo principio non si allontanava molto dal punto di vista di Carnot, ma Poncelet lo sviluppò ulteriormente e lo generalizzò sino a includere i punti all'infinito che erano già stati suggeriti da Keplero e da Desargues. Così di due rette si poteva dire che esse si intersecano sempre, o in un punto proprio, oppure (come nel caso delle rette parallele) in un punto all'infinito, chiamato punto improprio. Al fine di raggiungere la stessa generalità di cui godeva l'analisi,

Poncelet si trovò nella necessità di introdurre nella geometria sintetica non soltanto punti impropri, ma anche punti immaginari, giacché soltanto in tal modo si poteva affermare che una circonferenza e una retta si intersecano sempre. Fra le sue scoperte più notevoli v'era quella che tutte le circonferenze di qualsiasi genere tracciate nel piano hanno due punti in comune. Questi sono due punti immaginari impropri, noti come punti ciclici all'infinito e solitamente indicati con le lettere I e J (o, più informalmente, come Isaac e Jacob).

Poncelet sosteneva che il suo principio di continuità, che presumibilmente gli era stato suggerito dalla geometria analitica, era in realtà uno sviluppo peculiare della geometria sintetica, e ben presto egli divenne un paladino di quest'ultima contro gli analisti. Nella seconda metà del XVIII secolo si erano avute dispute, specialmente in Germania, circa i meriti rispettivi dell'analisi e della sintesi. Nel 1759 il matematico e storico della matematica A.G. Kaestner (1719-1800), professore a Lipsia e a Gottinga, aveva sostenuto che l'analisi era superiore come metodo euristico per risolvere i problemi per la capacità di calcolo e l'economia di pensiero offerti dai suoi strumenti. Uno dei suoi studenti, G.S. Klügel (1739-1812), scrisse nel 1767 di sospettare che i matematici inglesi cercassero, attraverso la difficoltà delle loro dimostrazioni effettuate con metodi sintetici, di accrescere la propria reputazione. Agli inizi del XIX secolo in Francia l'interesse per le due metodologie rivali era tale che nel 1813 la Società Scientifica di Bordeaux bandì un premio per il migliore saggio che riuscisse a caratterizzare il metodo sintetico e quello analitico e a chiarire l'influsso esercitato da ciascuno dei due. Il saggio vincente, presentato da un insegnante di Versailles[7], concludeva esprimendo la speranza che vi potesse essere una riconcilazione fra i due campi avversi; ma sei anni più tardi la polemica scoppiò di nuovo e diventò sempre più aspra. I due rivali principali erano, fatto abbastanza interessante, Poncelet e Gergonne, entrambi allievi di Monge, un matematico che si era trovato ugualmente a suo agio tanto con la geometria analitica quanto con la geometria sintetica. All'inizio la rivalità fu amichevole: entrambi pubblicarono nel 1818, l'anno della morte di Monge, due memorie sugli *Annales* di Gergonne, in cui Poncelet sosteneva la superiorità della geometria sintetica e Gergonne quella dei metodi analitici. Ma nel 1826 scoppiò una polemica fra i due circa la priorità della recente scoperta del principio di dualità. Abbiamo visto precedentemente come i teoremi di Pascal e di Brianchon fossero correlati l'uno all'altro mediante un semplice scambio dei termini punto e retta. Ger-

[7] Per ulteriori dettagli si veda C.B. BOYER, "Analysis: Notes on the Evolution of a Subject and a Name", *The Mathematics Teacher*, 47, 1954, pp. 450-462, in particolare p. 459. Per una trattazione ampia e dettagliata dell'argomento si veda G. FANO - S. CARRUS, "Exposé du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le 19ème siècle", *Encyclopédie des sciences mathématiques*, vol. III, 3, pp. 185-259.

gonne era convinto che i metodi analitici avrebbero mostrato che tale interscambiabilità dei termini era valida universalmente. In altre parole, Gergonne riteneva che, per qualsiasi teorema della geometria piana che includesse punti e rette, il principio di dualità, ottenuto scambiando i termini punto e retta, fosse anch'esso valido. Cominciò così a pubblicare sugli *Annales* coppie di teoremi duali stampati su colonne parallele. Poncelet sosteneva di avere scoperto per primo il principio di dualità, nel quale vedeva una conseguenza della relazione esistente nella geometria pura tra un polo e la sua retta polare rispetto a una conica.

4 Non è cosa facile stabilire chi per primo abbia riconosciuto il principio di dualità; è però certo che la giustificazione logica di questo principio venne data in maniera definitiva nel 1829 da Julius Plücker (1801-1868) mediante l'introduzione nella geometria analitica di un importante nuovo punto di vista. Se Monge era stato forse il primo geometra nel senso moderno, Plücker diventò il primo geometra analitico. Le sue prime memorie pubblicate sugli *Annales* di Gergonne nel 1826 avevano riguardato in larga misura metodi sintetici, ma egli incautamente si lasciò invischiare in una polemica con Poncelet al punto da abbandonare il campo dei partigiani della geometria sintetica e da diventare il più fecondo rappresentante della geometria analitica. Egli si convinse sempre più fermamente che i metodi algebrici fossero di gran lunga preferibili a quelli puramente geometrici di Poncelet e di Steiner. Il fatto che nella geometria delle coordinate il suo nome sopravviva ancor oggi in quelle che vengono chiamate coordinate plückeriane, che costituiscono delle notazioni abbreviate, testimonia l'influsso della sua opera, sebbene in questo caso l'espressione gli attribuisca più di quanto gli sia giustamente dovuto. Infatti nei primi decenni del XIX secolo parecchi matematici, tra i quali Gergonne, si erano resi conto che la geometria analitica era appensantita da complicati calcoli algebrici, e pertanto cominciarono ad abbreviare drasticamente le notazioni. La famiglia di tutte le circonferenze passanti per l'intersezione delle due circonferenze $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$, per esempio, venne indicata da Gabriel Lamé (1795-1870) nel 1818 con la semplice espressione $mC+m'C'=0$, ricorrendo a due parametri o moltiplicatori m e m'. Gergonne e Plücker preferivano usare un unico moltiplicatore simbolizzato da una lettera greca: il primo scriveva $C+\lambda C'=0$, da cui abbiamo l'espressione "lambdalizzare"; il secondo usava l'abbreviazione $C+\mu C'=0$, da cui derivò l'espressione "μ di Plücker". L'iniziatore dello studio nella geometria analitica di famiglie di curve a un parametro per mezzo di notazioni abbreviate sembra sia stato Lamé, ma fu Plücker che, specialmente negli anni 1827-1829, sviluppò al massimo questo studio. Detto tra parentesi, che il fascio lineare di circonferenze $C+\mu C'=0$ formi un'interessante "famiglia radicale" sia che $C_1=0$ e $C_2=0$ si intersechino, sia che non si intersechino, era stato riconosciuto circa quindici anni prima da L. Gaultier nell'ambito della geometria pura; pertanto l'asse radicale (la retta che appartiene alla famiglia di curve $C+\mu C'=0$) viene talvolta chiamato la "retta di Gaultier". Questa retta gode della proprietà in base alla quale le tangenti tracciate da qualsiasi punto di essa ai membri della famiglia di circonferenze sono uguali, ossia, per usare l'espressione di Steiner, la "potenza" di un punto che giace sull'asse radicale rispetto ai membri della famiglia è la stessa per tutte le circonferenze della famiglia.

Fra i molteplici usi di Plücker della sua notazione abbreviata ricordiamo quello da lui fatto in una memoria pubblicata sugli *Annales* di Gergonne del 1828 dove spiegava il paradosso di Cramer-Eulero. Se, per esempio, si prendono a caso quattordici punti di un piano, la quartica passante per questi punti può venire scritta come $Q+\mu Q'=0$, dove $Q=0$ e $Q'=0$ sono due quartiche distinte passanti per tredici dei quattordici punti dati. Determiniamo μ in modo che le coordinate dei quattordici punti soddisfino l'equazione $Q+\mu Q'=0$. Le tre quartiche $Q=0$, $Q'=0$ e $Q+\mu Q'=0$ avranno allora tutte in comune non solo i *tredici* punti originari, ma anche tutti i *sedici* punti di intersezione di $Q=0$ e $Q'=0$. Pertanto, per ogni insieme di tredici punti vi sono altri tre punti dipendenti da essi, o associati ad essi, e nessun insieme di quattordici o più punti scelti dall'insieme complessivo di sedici punti dipendenti determinerà un'unica quartica, nonostante il fatto che un insieme di quattordici punti presi a caso generalmente determinerà una quartica in maniera univoca. Più in generale, qualsiasi insieme dato di

$$\frac{n(n+3)}{2}-1$$

punti presi a caso determinerà un insieme concomitante di

$$n^2-\left[\frac{n(n+3)}{2}-1\right]=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

punti addizionali "dipendenti" in maniera tale che qualsiasi curva di grado n passante per l'insieme di punti dato passerà anche per i punti dipendenti[8]. Plücker formulò anche il teorema duale di questo teorema sul paradosso di Cramer-Eulero, e lo generalizzò a superfici dello spazio a tre dimensioni.

[8] Si veda CHARLOTTE A. SCOTT, "On the Intersections of Plane Curves", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4, 1897-1898, pp. 260-273.

5 Fu Plücker che, nel primo volume delle sue *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (1828), (Sviluppi analitico-geometrici) elevò a principio la notazione abbreviata di Lamé e di Gergonne; nel secondo volume della sua importante opera (uscito nel 1831) Plücker riscoperse un nuovo sistema di coordinate che era già stato inventato da tre altri matematici indipendentemente l'uno dall'altro. Si trattava di quelle che vengono oggi chiamate coordinate proiettive omogenee, di cui Feuerbach era stato uno degli inventori[9]. Un altro fu A.F. Möbius (1790-1860), che pubblicò il proprio schema nel 1827 in un'opera dal titolo *Der barycentrische Calcül* (Il calcolo baricentrico). L'autore di quest'opera classica è noto, però, soprattutto per la superficie a una sola faccia che porta il suo nome: il nastro di Möbius, ottenuto congiungendo le due estremità di un nastro dopo averne rovesciata una. Un altro inventore delle coordinate omogenee fu Étienne Bobillier (1797-1832), che aveva studiato all'École Polytechnique e pubblicò il suo nuovo sistema di coordinate negli *Annales* di Gergonne del 1827-1828. Le notazioni e i concetti di questi quattro inventori delle coordinate omogenee differivano abbastanza tra loro[10]; ma avevano tutti in comune una cosa: facevano uso di *tre* coordinate invece di *due* per individuare un punto di un piano. Questi sistemi erano equivalenti a quelle che sono note anche come coordinate trilineari. Plücker, di fatto, in un primo momento specificò le sue tre coordinate x, y e t di un punto P di un piano come le tre distanze di P dai lati di un triangolo di riferimento. In seguito, nel II volume delle sue *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, diede la definizione, divenuta più comune, di coordinate omogenee come qualsiasi insieme di tre numeri ordinati (x, y, t) correlati alle coordinate cartesiane (X, Y) di P in modo che $x = Xt$ e $y = Yt$. Apparirà immediatamente evidente che le coordinate omogenee di un punto P non sono uniche; infatti le terne numeriche (x, y, t) e (kx, ky, kt) corrispondono alla medesima coppia cartesiana $\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$. Questa mancanza di univocità, però, non crea maggiore difficoltà di quanta ne crei la mancanza di univocità delle coordinate polari o la mancanza di univocità di forma nel caso di frazioni uguali. La qualifica di "omogenee" data a tali coordinate trae origine, naturalmente, dal fatto che, quando si usano le equazioni di trasformazione per trasformare l'equazione di una curva $f(X, Y) = 0$ in coordinate cartesiane ortogonali nella forma $f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$, la nuova equazione conterrà termini tutti dello stesso grado nelle variabili x, y e t. Si noterà poi, cosa ancor più importante, che nel sistema di coordinate cartesiane non v'è nessuna coppia di numeri che corrisponda a una terna di numeri della forma $(x, y, 0)$ nelle coordinate omogenee del piano. Tale terna (purché x e y non siano entrambe uguali a zero) designa un punto improprio, ossia un "punto all'infinito". Finalmente, dopo lungo tempo gli elementi infiniti di Keplero, di Desargues e di Poncelet venivano a essere vincolati a un sistema di coordinate espresse da numeri ordinari. Inoltre, esattamente come qualsiasi terna ordinata di numeri reali (purché non siano tutti uguali a zero) corrisponde nelle coordinate omogenee a un punto di un piano, così anche ogni equazione lineare $ax + by + ct = 0$ (purché a, b e c non siano tutti uguali a zero) corrisponde a una retta del piano. In particolare, tutti i "punti all'infinito" del piano giacciono ovviamente sulla retta data dall'equazione $t = 0$, nota come la retta all'infinito o la retta ideale del piano. È ovvio che questo nuovo sistema di coordinate è adatto in modo ideale allo studio della geometria proiettiva, che fino ad allora era stato affrontato quasi esclusivamente dal punto di vista della geometria pura.

[9] Si veda ALBERT KEIFER, *Die Einführung der homogenen Koordinaten durch K. W. Feuerbach*, M.D. Schauberg, Strasburgo, 1910.

[10] Per ulteriori particolari e riferimenti bibliografici si veda C.B. BOYER, *History of Analytic Geometry*, 1956, pp. 241-244, 249-252.

6 Le coordinate omogenee rappresentavano un grande passo in avanti in direzione dell'aritmetizzazione della geometria, ma nel 1829 Plücker pubblicò sul *Journal* di Crelle una memoria nella quale presentava un punto di vista rivoluzionario che segnava una completa rottura con il vecchio concetto cartesiano delle coordinate concepite come segmenti di retta. L'equazione di una retta nel sistema di coordinate omogenee ha la forma $ax + by + ct = 0$. I tre coefficienti o parametri (a, b, c) determinano una unica retta nel piano, così come le tre coordinate omogenee (x, y, t) corrispondono a un unico punto nel piano. Poiché le coordinate sono numeri, e quindi non sono dissimili dai coefficienti, Plücker si rese conto che era possibile modificare la terminologia comunemente usata e chiamare (a, b, c) le *coordinate* omogenee di una retta. Se, infine, si inverte la convenzione cartesiana in modo che le lettere iniziali dell'alfabeto designino variabili e quelle finali indichino costanti, l'equazione $ax + by + ct = 0$ rappresenta un fascio di rette passanti per il punto fisso (x, y, t) anziché un fascio di punti giacenti sulla retta fissa (a, b, c). Se, ora, si considera l'equazione indeterminata $pu + qv + rw = 0$, è chiaro che la si può indifferentemente considerare come la totalità dei punti (u, v, w) giacenti sulla retta fissa (p, q, r) oppure come la totalità delle rette (p, q, r) passanti per il punto fisso (u, v, w).

Plücker aveva scoperto la controparte analitica immediata del principio geometrico di dualità, intorno al quale era sorta la disputa tra Gergonne e Poncelet; appariva ora evidente che la giustificazione cercata invano dalla geometria pura veniva fornita qui dal punto di vista algebrico. Lo scambio dei termini "punto" e "retta" corrispondeva semplicemente a uno scambio dei termini "costante" e "variabile" rispetto alle quantità p, q, r e u, v, w. Dalla simmetria della situazione algebrica appare chiaro che ogni teorema concernente $pu+qv+rw=0$ si presenta immediatamente in due forme, una duale dell'altra. Inoltre Plücker mostrò che ogni curva (diversa da una retta) poteva essere considerata come avente una origine duale: essa è un luogo generato da un punto che si muove e inviluppato da una retta che si muove, ove il punto si muove con continuità lungo la retta mentre la retta ruota con continuità attorno al punto. Cosa abbastanza strana, il grado di una curva espresso in coordinate di punti (l'"ordine" della curva) non è necessariamente identico al grado della curva espresso in coordinate di rette (la "classe" della curva), e uno dei più importanti risultati raggiunti da Plücker, che lo pubblicò sul *Journal* di Crelle nel 1834, fu la scoperta di quattro equazioni, (dette formule di Plücker), le quali mettono in relazione la classe e l'ordine di una curva con le singolarità della curva stessa:

$$m=n(n-1)-2\delta-3\kappa \quad \text{e} \quad n=m(m-1)-2\tau-3\iota$$

$$\iota=3n(n-2)-6\delta-8\kappa \quad \text{e} \quad \varkappa=3m(m-2)-6\tau-8\iota$$

dove m è la classe, n l'ordine, δ il numero dei punti doppi o nodi, κ il numero delle cuspidi, ι il numero dei flessi, e τ il numero delle bitangenti. Da queste equazioni appare immediatamente evidente che una conica di ordine 2 non può avere nessuna singolarità e così deve anche essere di classe 2.

In una memoria pubblicata sul *Journal* di Crelle del 1831 Plücker aveva esteso il principio di dualità allo spazio tridimensionale, dove le relazioni intercorrenti tra le coordinate omogenee (a, b, c, d) di un piano e le coordinate omogenee (x, y, z, t) di un punto mostravano che il duale di un teorema nella spazio tridimensionale si ottiene attraverso uno scambio reciproco dei termini "punto" e "piano", mentre il termine "retta" rimane immutato. Il matematico francese Michel Chasles (1793-1880) sosteneva di avere avuto l'idea delle coordinate della retta e del piano più o meno contemporaneamente a Plücker, offrendo così un ulteriore esempio di simultaneità di scoperta nella geometria del XIX secolo[11]. In memorie e in libri pubblicati più tardi Plücker ampliò le proprie ricerche e generalizzò le proprie idee fino a prendere in considerazione coordinate cartesiane e omogenee immaginarie. Appariva ora una questione abbastanza banale quella di giustificare il teorema di Poncelet, che affermava che tutte le circonferenze hanno in comune due punti immaginari all'infinito: infatti i punti (1, i, 0) e (i, 1, 0) soddisfano entrambi l'equazione $x^2+y^2+axt+byt+ct^2=0$, quali che siano i possibili valori

[11] Si veda C.B. BOYER, *History of Analytic Geometry*, p. 251, nota 65.

assunti da a, b, c. Plücker dimostrò inoltre che i fuochi delle coniche hanno la proprietà che le tangenti immaginarie da questi punti alla curva passano per i due punti ciclici cui abbiamo accennato nel paragrafo 3; egli definiva pertanto il fuoco di una curva piana superiore come un punto avente questa proprietà.

7 Ai tempi di Descartes e di Fermat, e ancora di nuovo ai tempi di Monge e di Lagrange, la Francia era stata il centro degli studi di geometria analitica, ma con l'opera di Plücker il primato in questo campo passò al di là del Reno. Nondimeno, Plücker fu in larga misura il proverbiale profeta inascoltato in patria. In Germania Steiner godeva di una straordinaria reputazione; e sappiamo che Steiner nutriva un intenso disprezzo per i metodi analitici. Il termine analisi comporta una certa quantità di tecnicismo o di macchinosità e perciò, spesso, si considera l'analisi come uno strumento, termine questo che non viene mai applicato alla sintesi; e Steiner era contrario a ogni genere di strumento o di "puntello" nella geometria. Egli era del parere che i calcoli fossero un sostituto del pensiero, mentre la geometria avrebbe dovuto stimolare l'attività concettuale. Möbius rimase neutrale nella controversia fra i rispettivi sostenitori dei metodi analitici e di quelli sintetici, ma Jacobi, nonostante che fosse egli stesso un abile costruttore di algoritmi, si unì a Steiner nella polemica contro Plücker[12]. Scoraggiato, Plücker nel 1847 abbandonò la geometria per occuparsi di fisica, pubblicando una serie di memorie sul magnetismo e sulla spettroscopia.

È un'ironia della storia il fatto che l'opera di Plücker abbia trovato sostenitori e seguaci dove meno ce lo saremmo aspettato. Per tutto il XVIII secolo l'Inghilterra era stata una roccaforte della geometria sintetica: mentre Monge e Lagrange stavano mettendo a punto la rivoluzione analitica in Francia, in Inghilterra la geometria delle coordinate aveva fatto scarsi progressi al di là di Newton. Persino le *Coniche* di Wallis erano cadute in disuso a Cambridge, dove l'interesse per la matematica era molto scarso all'inizio del XIX secolo[13]. La rapida impennata della ricerca matematica in Francia e in Germania aveva avuto scarsa risonanza in Gran Bretagna. Di fronte a una situazione del genere, un gruppo di giovani matematici di Cambridge formarono, nel 1812, quella che essi chiamarono Analytical Society. Per usare le parole di Charles Babbage (1792-1871), una delle figure più rappresentative di questo grup-

[12] Un'eccellente esposizione dell'opera di Plücker si potrà trovare in WILHELM ERNST, *Julius Plücker*, 1933, Si veda anche ALFRED CLEBSCH, "Notice sur les travaux de Jules Plücker", *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 5, 1872, pp. 183-212.

[13] Si veda W.W.R. BALL, *A History of the Study of Mathematics at Cambridge*, Cambridge, 1889.

po, la Società aveva lo scopo di promuovere "i princìpi del puro *d*-ismo contro il *dot*-age dell'università" (ove l'espressione *dot*-age è un gioco di parole su *dot* = punto, e *dotage* = rimbambimento). Si trattava, evidentemente, di un riferimento ironico all'inveterato rifiuto dei matematici inglesi di abbandonare il metodo delle "flussioni puntate" di Newton a favore dei differenziali di Leibniz. (Un secondo scopo della Società era quello di "lasciare il mondo più saggio di quanto non lo avesse trovato".) Il programma dell'Analytical Society implicava anche, più generalmente, il desiderio di far tesoro dei grandi passi avanti realizzati nel campo della matematica nel resto dell'Europa[14]. Nel 1816, per ispirazione della Società, fu pubblicata una versione inglese del *Calculus* di Lacroix, e nel giro di pochi anni i matematici inglesi furono in grado di competere con i loro colleghi continentali. Per esempio, George Green (1793-1841), figlio autodidatta di un mugnaio, nel 1828 pubblicò privatamente un saggio sull'elettricità e sul magnetismo che conteneva l'importante teorema che porta il suo nome: se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ hanno derivate parziali continue nella regione R del piano di coordinate x e y delimitato da una curva C, allora $\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy$. Questo teorema, o il suo analogo nello spazio, è noto anche come teorema di Gauss, giacché i risultati di Green furono in gran parte trascurati e dimenticati fino a quando non furono riscoperti da Lord Kelvin nel 1846. Nel frattempo il teorema era stato scoperto indipendentemente anche da Michele Ostrogradskij (1801-1861), del quale in Russia porta ancora il nome.

8 Il risveglio della matematica in Inghilterra è simboleggiato dal fatto che nel 1839 venne fondato il *Cambridge Mathematical Journal*. Poco dopo l'Inghilterra vide affermarsi uno dei più prolifici matematici di tutti i tempi, la cui produzione era paragonabile in quantità soltanto a quella di Eulero e di Cauchy. Questi era Arthur Cayley (1821-1895); brillante studente a Cambridge, vinse moltissimi premi matematici e fin nella giovanissima età cominciò a pubblicare articoli sul *Cambridge Mathematical Journal* e su altri periodici posteriori. Cayley era soprattutto un algebrista più che un geometra. Ma proprio l'aspetto algebrico aveva costituito il lato più debole dell'opera di Plücker. Sorprende il fatto che Plücker non abbia saputo sfruttare i vantaggi offerti dallo sviluppo dello studio dei determinanti, forse a motivo della sua ostilità verso Jacobi. Questa può essere stata la ragione del perché egli non abbia sviluppato

[14] Si veda J.M. DUBBEY, "The Introduction of the Differential Notation to Great Britain", *Annals of Science*, 19, 1963, pp. 37-48.

sistematicamente una geometria analitica a più di tre dimensioni. Plücker si era avvicinato a questo concetto quando, nel 1846, aveva osservato che i quattro parametri che determinano una retta nello spazio a tre dimensioni potevano essere concepiti come quattro coordinate, ma solo molto più tardi, nel 1865, egli ritornò sulla geometria analitica e sviluppò il concetto di una "nuova geometria dello spazio", cioè di uno spazio a quattro dimensioni nel quale gli elementi fondamentali non erano costituiti da punti, ma da rette. Nel frattempo, sin dal 1843 Cayley aveva dato inizio allo studio della ordinaria geometria analitica di uno spazio a n dimensioni, usando i determinanti come strumento essenziale. In questa notazione, usando coordinate omogenee, le equazioni della retta e del piano si possono scrivere, rispettivamente,

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0$$

Cayley fece osservare che il corrispondente elemento fondamentale a $(n-1)$ dimensioni dello spazio a n dimensioni poteva essere espresso, in coordinate omogenee, da un determinante di ordine $n+1$ simile a quelli indicati sopra. Molte delle semplici formule valide per due e per tre dimensioni potevano, se espresse in maniera appropriata, essere generalizzate allo spazio a n dimensioni. Nel 1846 Cayley pubblicò sul *Journal* di Crelle una memoria in cui di nuovo estendeva alcuni teoremi dallo spazio a tre dimensioni a quello a quattro dimensioni. Nel 1847 Cauchy pubblicava sui *Comptes Rendus* un articolo in cui studiava i "punti analitici" e le "rette analitiche" di uno spazio a più di tre dimensioni[15].

9 Ad appena un anno dalla pubblicazione del primo articolo di Cayley sulla geometria a più dimensioni, idee abbastanza analoghe vennero presentate in Germania da Hermann Grassmann (1809-1877) nella sua opera intitolata *Ausdehnungslehre* ("Teoria dell'estensione"). Con una notazione estremamente nuova che contribuiva a rendere oscura l'esposizione, Grassmann cercò di costruire una geometria iperspaziale che comportava un numero indefinito di elementi e di dimensioni, ma i suoi sforzi volti a elaborare una sorta di analisi vettoriale per lo spazio a n dimen-

[15] Estratti da queste e da altre opere si troveranno in D.E. SMITH, *Source Book in Mathematics*, pp. 524-545.

sioni incontrarono scarso interesse da parte dei suoi contemporanei[16]. Forse una delle ragioni di questo fatto si può individuare nell'influsso di cui godeva uno scienziato come Steiner, rigido sostenitore della geometria pura. Questi, nelle sue *Systematische Entwicklungen* (Sviluppi sistematici) del 1832, aveva presentato una trattazione della geometria proiettiva basata su considerazioni metriche. Alcuni anni più tardi la geometria pura trovava in Germania un altro sostenitore in K.G.C. von Staudt (1798-1867), la cui *Geometrie der Lage* (Geometria della posizione) del 1847 costruiva una geometria proiettiva che non faceva alcun riferimento a grandezze o a numeri. In Francia l'opera di Poncelet era stata continuata da Chasles, anche lui studente dell'École Polytechnique dove era poi diventato professore di geometria. A Chasles si deve il rilievo dato al concetto dei sei "rapporti anarmonici" o birapporti

$$\frac{c-a}{c-b} \Big/ \frac{d-a}{d-b}$$

tra quattro punti giacenti sulla stessa retta o tra quattro rette convergenti nello stesso punto, e della loro invarianza rispetto a trasformazioni proiettive. Il suo *Traité de géométrie supérieure* (1852) ebbe notevole influenza anche nel diffondere l'uso di segmenti orientati nella geometria pura. Chasles, famoso anche per il suo *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), fu una delle ultime grandi figure nel campo degli studi di geometria proiettiva in Francia. Fu soprattutto in Germania che la sua opera trovò dei continuatori in matematici come Steiner e von Staudt. A quest'ultimo in particolare è dovuta in larga misura la forma assunta definitivamente dalla geometria proiettiva sintetica[17].

10 È stato difficile, nelle pagine precedenti, presentare uno sviluppo lineare degli studi di geometria nella prima metà del XIX secolo a causa delle molteplici interferenze e interrelazioni fra i diversi aspetti di questa disciplina. Vi fu, però, un aspetto che si sviluppò indipendentemente dalle ricerche fin qui descritte: la nascita e l'affermarsi della geometria non-euclidea. Tuttavia anche in questo campo ci troviamo di fronte a un caso stupefacente di scoperta simultanea: infatti concetti molto simili furono enunciati nel corso del primo terzo del XIX secolo da tre mate-

[16] Per una esposizione complessiva delle idee di Grassmann si veda J.L. COOLIDGE, *A History of geometrical Methods*, 1963, pp. 252-257; la traduzione inglese di una parte dell'*Ausdehnungslehre* di GRASSMANN si trova in D.E. SMITH, *Source Book in Mathematics*, pp. 684-696.

[17] Per ulteriori particolari si veda J.L. COOLIDGE, *A History of Geometrical Methods*, pp. 92-101.

matici di origine e formazione diversa, uno tedesco, uno ungherese e uno russo. Abbiamo già ricordato che Gauss durante il secondo decennio del secolo era giunto alla conclusione che i tentativi per dimostrare il postulato delle parallele fatti da Saccheri, da Lambert, da Legendre, e dal suo amico ungherese Farkas Bólyai erano stati vani, e che erano possibili geometrie diverse da quella euclidea. Tuttavia egli non comunicò questa conclusione a nessun altro matematico; egli aveva elaborato tale concetto semplicemente "per se stesso", come affermava. Pertanto i tentativi di dimostrare il postulato delle parallele continuarono: tra coloro che si dedicarono a tale impresa vi fu il giovane Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856), figlio di un modesto funzionario governativo, rimasto orfano a sette anni. Nonostante le difficoltà finanziarie della famiglia, il giovane Nicolaj fu mandato a studiare all'università di Kazan, dove venne in contatto con ottimi professori fatti venire dalla Germania, tra cui J.M. Bartels (1769-1836), che era stato maestro anche di Gauss. A ventun anni Lobačevskij era già membro del corpo insegnante e nel 1827 fu nominato Rettore all'università di Kazan dove, per tutto il resto della sua vita, svolse attività didattica e amministrativa; gli ultimi anni, però, furono amareggiati dalla cecità e dallo scarso interesse suscitato dai suoi lavori.

Lobačevskij e Ostrogradskij erano entrambi matematici russi di grande rilievo, ma avevano idee nettamente diverse sia in politica sia in matematica. Ostrogradskij aveva studiato per lungo tempo a Parigi, dove aveva subito l'influsso di analisti come Cauchy, che in Francia avevano fatto fare all'analisi rapidi progressi. Lobačevskij, invece, era stato educato secondo i princìpi della tradizione matematica tedesca e con interessi prevalentemente rivolti alla geometria, un campo ove l'ambito e le direzioni della ricerca erano meno definiti e più controversi. Inoltre Ostrogradskij proveniva da una famiglia ricca e aristocratica di idee conservatrici, mentre Lobačevskij, costantemente assillato dalla povertà e dalle privazioni, non raggiunse mai una elevata posizione sociale e spesso si fece portavoce di idee liberali che avevano scarsa popolarità. Questi fatti possono spiegare la grande fama e stima di cui godette ai suoi tempi Ostrogradskij e che invece mancò a Lobačevskij. Oggi però il nome di Ostrogradskij è quasi sconosciuto, e viene ricordato solo in relazione a un unico teorema, mentre Lobačevskij viene considerato il "Copernico della geometria", ossia come colui che rivoluzionò questo campo della matematica mediante la creazione di una intera branca assolutamente nuova, la geometria lobačevskijana, mostrando come la geometria euclidea non fosse quella scienza esatta depositaria di verità assolute quale era stata precedentemente considerata. In un certo senso possiamo affermare che la scoperta della geometria non euclidea inferse un colpo mortale alla filosofia kantiana, paragonabile alle conseguenze che la scoperta di grandezze incommensurabili ebbe per il pensiero pitagorico. L'opera di Lobačevskij rese necessario modificare radicalmente le concezioni fondamentali circa la natura della matematica. I matematici contemporanei di Lobačevskij erano, però, troppo legati alla situazione presente per poterla giudicare in una prospettiva adeguata, e il matematico rivoluzionario dovette continuare da solo sulla nuova strada da lui aperta, sviluppando le proprio idee in solitario isolamento.

11 La concezione rivoluzionaria di Lobačevskij non sembra essere scaturita dalla sua mente per ispirazione improvvisa. In una trattazione di geometria abbozzata nel 1823, forse per usarla durante le lezioni, a proposito del postulato delle parallele Lobačevskij osservava semplicemente che "nessuna dimostrazione rigorosa della verità di questo postulato era mai stata scoperta"[18]. A quanto pare, a quella data egli non escludeva la possibilità che una dimostrazione del genere potesse essere scoperta in futuro. Tre anni più tardi presentò all'Università di Kazan una memoria (scritta in francese e oggi perduta) intorno ai princìpi della geometria, che comprendeva tra l'altro "une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles". L'anno 1826 può dunque essere considerato l'anno di nascita ufficioso della geometria lobačevskijana: fu in tale occasione, infatti, che l'autore enunciò molti dei teoremi caratteristici della nuova disciplina. Tre anni più tardi, nel 1829, Lobačevskij pubblicò sul *Kazanski Vestnik* (Gazzetta di Kazan) il saggio *O načalach geometrii* (*Sui princìpi della geometria*), che segna la nascita ufficiale della geometria non-euclidea. Negli anni tra il 1826 e il 1829 si era pienamente convinto che il quinto postulato di Euclide non potesse venire dimostrato sulla base degli altri quattro. Con l'articolo del 1829 egli era il primo matematico a fare il passo rivoluzionario consistente nel pubblicare una nuova geometria (ora chiamata geometria non-euclidea iperbolica) costruita specificamente su un'ipotesi che era in diretta contraddizione con il postulato delle parallele: per un punto C che giace al di fuori della retta AB si può tracciare nello stesso piano più di una retta che non incontri la AB. Da questo nuovo postulato Lobačevskij deduceva un'armoniosa struttura geometrica che non presentava nessuna contraddizione logica interna. Essa era sotto ogni punto di vista una geometria valida, ma appariva allo stesso Lobačevskij così contrastante con il senso comune che egli la chiamò "geometria immaginaria" e poi "pangeometria universale" o "completa".

Lobačevskij era perfettamente consapevole del profondo significato della sua scoperta di una "geometria immaginaria", come appare chiaramente dal fatto che nei venti anni che vanno dal 1835 al 1855 egli redasse tre diverse esposizioni complete della nuova geometria. Negli anni 1835-1838 uscirono in russo i suoi *Nuovi princìpi della geometria*; nel 1840 pubblicò in tedesco le *Ricerche geometriche sulla teoria delle parallele*; e nel 1855 il suo ultimo libro, intitolato *Pangeometria*, uscì quasi contemporaneamente in un'edizione russa e in una francese. (Tutte queste opere sono state tradotte in seguito in altre lingue, compreso l'italiano.)[19] Fu leggendo la seconda di queste opere che Gauss venne a conoscenza dei contributi di Lobačevskij alla geometria non-euclidea, e dietro sua raccomandazione Lobačevskij fu eletto nel 1842 membro della Società Scientifica di Gottinga. In diverse lettere ad amici Gauss elogiò le ricerche di Lobačevskij, ma non volle mai riconoscerle in scritti che fossero pubblicati per timore di suscitare le risa dei "beoti". Fu in parte per questa ragione che la conoscenza della nuova geometria si diffuse molto lentamente.

[18] Si vedano V. KAGAN, *N. Lobachevsky and his Contributions to Science*, 1957, p. 33; e A. VUCINICH, "Nikolai Ivanovich Lobachevskii: The Man behind the First Non-Euclidean Geometry", *Isis*, 53, 1962, pp. 465-481.

12 L'amico ungherese di Gauss, Farkas Bólyai, aveva dedicato gran parte della sua vita ai tentativi di dimostrare il postulato delle parallele. Quando venne a sapere che il proprio figlio, János Bólyai (1802-1860), si era immerso nello studio del problema delle parallele, il padre, insegnante di matematica in una città di provincia, scrisse al figlio, brillante ufficiale dell'esercito:

> Per amor del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere ed evitare non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso può rubarti tutto il tuo tempo e privarti della salute, della serenità di spirito, e della felicità.

Il figlio, lungi dal lasciarsi dissuadere, continuò nei suoi tentativi fino a che, verso il 1829, giunse alla medesima conclusione raggiunta da Lobačevskij solo pochi anni prima. Invece di tentare di dimostrare l'impossibile, il giovane Bólyai sviluppò quella che egli chiamava "Scienza assoluta dello spazio" partendo dall'ipotesi che per un punto esterno a una retta si possono tracciare, nello stesso piano, infinite rette parallele alla retta data. János inviò i risultati delle proprie riflessioni al padre, che li pubblicò in forma di appendice a un proprio trattato dal lungo titolo latino *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae etc.* conosciuto semplicemente con il nome di *Tentamen*. Sebbene questo trattato rechi una licenza di stampa datata 1829, ossia l'anno stesso in cui Lobačevskij pubblicò il suo saggio sulla *Gazzetta di Kazan*, l'opera fu in realtà pubblicata soltanto nel 1832.

[19] N.I. LOBAČEVSKIJ, *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele*, a cura di Lucio Lombardo-Radice, Torino, Einaudi, 1955.

L'atteggiamento di Gauss verso la "Scienza assoluta dello spazio" non fu diverso da quello da lui tenuto nel caso di Lobačevskij: sincera approvazione, non accompagnata però da riconoscimento e sostegno pubblico. Quando Fárkás Bólyai gli scrisse per chiedergli la sua opinione sull'opera poco ortodossa del figlio, Gauss rispose di non potere lodare il lavoro di János perché ciò sarebbe equivalso a lodare se stesso, dal momento che aveva avuto le stesse idee da parecchi anni. È facilmente comprensibile che il focoso János ci sia rimasto male, temendo soprattutto di essere privato del merito della priorità. Lo scarso riconoscimento dato per molti anni al suo lavoro, oltre alla pubblicazione dell'opera di Lobačevskij in tedesco nel 1840, lo gettarono in un tale stato di disperazione che non pubblicò più nessun'altro lavoro. La parte maggiore del merito di avere gettato le basi della geometria non-euclidea spetta dunque a Lobačevskij[20].

13 La geometria non-euclidea per parecchi decenni continuò a rappresentare un aspetto marginale della matematica, fino a che essa non venne incorporata nella matematica come sua parte integrante attraverso le concezioni generali di G.F.B. Riemann (1826-1866). Figlio di un pastore protestante, Riemann fu allevato in condizioni molto modeste, conservando per tutta la vita un corpo fragile e maniere timide. Tuttavia riuscì a procurarsi un'educazione di ottimo livello, dapprima a Berlino e poi a Gottinga, dove ottenne la laurea con una dissertazione sulla teoria delle funzioni di variabile complessa. È in questa dissertazione che troviamo le cosiddette equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, alle quali una funzione analitica $w = f(z) = u + iv$ di una variabile complessa $z = x + iy$ deve soddisfare, sebbene tale condizione fosse già nota fin dai tempi di Eulero e d'Alembert[21]. La dissertazione introduceva anche il concetto di superficie riemanniana, che anticipava il ruolo che la topologia avrebbe successivamente assunto nel campo dell'analisi.

Nel 1854 Riemann diventò *Privatdozent* all'Università di Gottinga, e in base alle consuetudini fu invitato a pronunciare un *Habilitationschrift* davanti alla facoltà. Il risultato fu la più famosa dissertazione di abilitazione della storia della matematica: essa infatti presentava un'ampia e profonda visione dell'intero campo della geometria. La tesi recava il titolo *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria), ma essa non forniva alcun esempio specifico; sosteneva invece una visione globale della geometria come studio di varietà di un numero qualsiasi di dimensioni in qualsiasi genere di spazio. Le geometrie di Riemann sono non-euclidee in un senso molto più generale di quella di Lobačevskij, dove si tratta semplicemente di stabilire quante rette parallele sono possibili per un punto. Secondo la concezione di Riemann la geometria non dovrebbe neppure necessariamente trattare di punti o di rette o di spazio nel senso ordinario, ma di insiemi di ennuple ordinate che vengono raggruppate secondo certe regole.

[20] Porzioni più o meno estese delle opere di Lobačevskij e di Bòlyai sono disponibili in traduzione inglese in diverse pubblicazioni, tra cui D.E. Smith, *Source Book in Mathematics*. Una esposizione completa e dettagliata si trova in Friedrich Engel - Paul Stäckel, *Urkunde zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, 1898-1913. Si veda in particolare Roberto Bonola, *Geometria non euclidea*, Zanichelli, Bologna, 1906, che contiene una traduzione della *Teoria delle parallele* di Lobačevskij e della *Scienza assoluta dello spazio* di Bòlyai. Il lettore italiano può vedere N.I. Lobačevskij, *Nuovi principi della geometria*, a cura di L. Lombardo-Radice, Torino, Einaudi, 1955.

[21] Si veda E.T. Bell, *Development of Mathematics*, New York, McGraw-Hill, 1940, p. 465.

Fra le più importanti regole valide in qualsiasi geometria v'è, secondo la concezione di Riemann, quella per trovare la distanza tra due punti infinitamente vicini. Nella geometria euclidea ordinaria questa "metrica" è data dalla formula $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; ma si possono usare infinite altre formule come formule della distanza, e naturalmente la metrica usata determinerà le proprietà dello spazio o la geometria. Uno spazio la cui metrica è espressa dalla formula

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}\,dx^2 + g_{12}\,dx\,dy + g_{13}\,dx\,dz \\ &+ g_{21}\,dy\,dx + g_{22}\,dy^2 + g_{23}\,dy\,dz \\ &+ g_{13}\,dz\,dx + g_{23}\,dz\,dy + g_{33}\,dz^2 \end{aligned}$$

dove i g sono costanti o, più generalmente, funzioni di x, y e z, è noto come spazio riemanniano. Così lo spazio (localmente) euclideo rappresenta soltanto il caso molto particolare di uno spazio riemanniano in cui $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ e tutti gli altri g siano zero. Dalla sua metrica Riemann dedusse persino una formula esprimente la curvatura gaussiana di una "superficie" nel suo "spazio". Non meraviglia il fatto che, dopo questa lezione di Riemann, Gauss abbia espresso, forse per la prima e ultima volta nella sua lunga carriera, la propria ammirazione per l'opera di un altro matematico[22].

Oggi l'espressione "geometria di Riemann" viene usata in un senso più ristretto, ossia per indicare quella particolare geometria piana che si ottiene partendo dall'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri nel caso in cui si abbandoni anche la prolungabilità all'infinito della retta. Un modello di questa geometria è dato dalla interpretazione di "piano" come superficie di una sfera e di "retta" come cerchio massimo della

[22] Si veda E.T. Bell, *Men of Mathematics*, New York, Simon and Schuster, 1937, pp. 484-509.

sfera stessa. In questo caso la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due angoli retti, mentre nella geometria di Lobačevskij e di Bólyai (corrispondenti all'ipotesi dell'angolo acuto) la somma degli angoli è minore di due angoli retti. L'uso attuale del nome di Riemann limitatamente a uno dei tipi di geometria non-euclidea non dà, però, pieno riconoscimento al radicale mutamento introdotto nel pensiero geometrico dal suo *Habilitationschrift* del 1854 (pubblicato soltanto nel 1867). Fu l'idea di Riemann di uno studio generale degli spazi metrici curvi, più che quello del caso particolare della geometria sulla sfera, che alla fine rese possibile la teoria della relatività generale. Lo stesso Riemann diede importanti contributi alla fisica teorica in parecchie direzioni. Era pertanto giusto che nel 1859 venisse nominato successore di Dirichlet nella cattedra di Gottinga che era stata occupata da Gauss.

Dimostrando che la geometria non-euclidea, in cui la somma degli angoli di un triangolo sia maggiore di due angoli retti, trovava una realizzazione sulla superficie della sfera, Riemann forniva essenzialmente una dimostrazione della non-contraddittorietà degli assiomi da cui derivava tale geometria. In maniera molto simile Eugenio Beltrami (1835-1900), collega di Cremona all'Università di Bologna e più tardi professore di matematica nelle Università di Pisa, Pavia e Roma, mostrò che era disponibile un modello anche per la geometria di Lobačevskij. Esso era rappresentato dalla superficie generata dalla rivoluzione di una trattrice intorno al proprio asintoto, superficie nota con il nome di pseudosfera perché ha curvatura costante negativa, mentre la sfera ha curvatura costante positiva. Se definiamo la "retta" passante per due punti della pseudosfera come la geodetica passante per quei punti, la geometria che ne risulta avrà le proprietà derivanti dai postulati di Lobačevskij. Poiché il piano è una superficie con curvatura costante nulla, la geometria euclidea può essere considerata come un tipo intermedio tra i due tipi di geometria non-euclidea.

14 L'unificazione della geometria realizzata da Riemann era importante e significativa soprattutto in relazione all'aspetto microscopico della geometria differenziale, ossia alla geometria "nel piccolo". La geometria analitica, o geometria "nel grande", non aveva subito grandi cambiamenti. Di fatto, la dissertazione di Riemann fu presentata verso la metà del periodo di inattività geometrica che Plücker si era imposto, periodo durante il quale la geometria analitica rimase in uno stato di letargo in Germania. Nel 1865 Plücker riprese a pubblicare articoli di matematica, questa volta su periodici inglesi invece che sul *Journal* di Crelle, forse in conseguenza dell'interesse che Cayley aveva mostrato per i suoi lavori. In tale anno Plücker pubblicò sulle *Philosophical Transactions* una memoria, che tre anni dopo ampliò in un libro, su una

Nuova geometria dello spazio. In essa veniva esplicitamente formulato un principio che Plücker aveva intuito una ventina d'anni prima. Uno spazio — secondo tale intuizione — non doveva necessariamente essere concepito come una totalità di punti, ma poteva benissimo essere visualizzato come composto da rette (spazio rigato). Di fatto, qualsiasi figura che era stata precedentemente concepita come luogo o totalità di punti poteva essa stessa essere presa come *elemento* dello spazio: la dimensionalità dello spazio avrebbe allora corrisposto al numero di parametri che determinavano questo elemento. Se il nostro spazio ordinario a tre dimensioni viene considerato come un "mucchio di fieno cosmico formato da fili di paglia infinitamente sottili e infinitamente lunghi" piuttosto che come un "agglomerato di pallini da caccia infinitamente fini"[23], esso risulta quadridimensionale anziché tridimensionale. Nel 1868, l'anno in cui Plücker pubblicò il suo libro su questo argomento, Cayley, in una memoria pubblicata sulle *Philosophical Transactions*, sviluppò analiticamente il concetto di piano cartesiano ordinario bidimensionale come uno spazio a cinque dimensioni, i cui elementi erano costituiti da coniche. La *Neue Geometrie des Raumes* di Plücker conteneva anche altri nuovi concetti. La rappresentazione geometrica di una equazione $f(x, y, z) = 0$ in coordinate cartesiane viene chiamata superficie, un sistema di due equazioni corrisponde a una curva, e un sistema di tre o più equazioni determina uno o più punti. Nella "nuova geometria" del suo spazio di rette quadridimensionale Plücker chiamava "complesso" la figura rappresentata da una equazione $f(r, s, t, u) = 0$ nelle quattro coordinate del suo spazio di rette, mentre un sistema di due equazioni designava una "congruenza" e un sistema di tre equazioni indicava una "rigata". Plücker trovò che il complesso di rette quadratico aveva proprietà simili a quelle della superficie quadrica, ma morì prima di aver condotto a termine l'ampio studio progettato. Nell'anno stesso della sua morte, il 1868, uscì la sua *Nuova geometria* a cura di uno dei suoi allievi, Felix Klein (1849-1925).

15 Klein era stato assistente di Plücker all'Università di Bonn nel periodo che aveva visto il ritorno di quest'ultimo agli studi di geometria, e in un certo senso Klein può essere considerato come il successore di Plücker per la sua dedizione alla geometria analitica. Tuttavia le ricerche del giovane matematico in questo campo si orientarono in una direzione differente, che contribuì a introdurre qualche elemento di unità nella diversità dei nuovi risultati. La nuova concezione di Klein era in parte il risultato di parecchi viaggi a Parigi, dove le intuizioni di Lagrange sulla teoria dei gruppi erano state sviluppate, specialmente attraverso

[23] Si veda E.T. BELL, *Men of Mathematics*, p. 400.

il concetto di gruppi di sostituzione, in una nuova branca algebrica in sé completa. Klein rimase profondamente colpito dalle possibilità unificatrici offerte dal concetto di gruppo, e dedicò quasi tutto il resto della sua attività scientifica a sviluppare, applicare e divulgare tale nozione. In alcune delle sue ricerche lavorò in collaborazione con il matematico norvegese Sophus Lie (1842-1899), compagno di studi di Klein a Gottinga. A Lie, autore tra l'altro di un ponderoso trattato in tre volumi sulla teoria dei gruppi continui di trasformazioni (1888-1893), si deve la scoperta delle trasformazioni di contatto. Le trasformazioni di contatto di Lie, rielaborate in forma sistematica da Klein, stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra rette e sfere dello spazio euclideo in maniera tale che rette intersecanti corrispondono a sfere tangenti[24]. (In conformità con il punto di vista di Plücker, le rette e le sfere dello spazio euclideo tridimensionale formano ognuna uno spazio quadridimensionale.) In generale, le trasformazioni di contatto sono trasformazioni analitiche che a superfici tangenti fanno corrispondere altre superfici tangenti.

Si dice che un insieme di elementi formano un gruppo rispetto a una data operazione quando: 1) l'insieme degli elementi è chiuso rispetto all'operazione; 2) l'insieme contiene un elemento di identità rispetto all'operazione; 3) per ogni elemento dell'insieme esiste un elemento inverso rispetto all'operazione, e 4) l'operazione è associativa. Gli elementi possono essere numeri (come nell'aritmetica), punti (come nella geometria), trasformazioni (come nell'algebra o nella geometria), o qualsiasi altra cosa. L'operazione può essere aritmetica (come l'addizione e la moltiplicazione), o geometrica (come una rotazione intorno a un punto o a un asse), oppure qualsiasi altra regola per comporre o "combinare" due elementi di un insieme (come due trasformazioni) a formare un terzo elemento dello stesso insieme. La generalità del concetto di gruppo appare immediatamente evidente: Klein, in un celebre discorso inaugurale tenuto nel 1872, quando diventò professore a Erlangen, mostrò come esso potesse essere impiegato quale mezzo conveniente per caratterizzare le varie geometrie che erano apparse nel corso del secolo.

Nel suo discorso, che diventò famoso come *Programma di Erlangen*, Klein descriveva la geometria come lo studio delle proprietà delle figure aventi carattere invariante rispetto a un particolare gruppo di trasformazioni. Qualsiasi classificazione dei gruppi di trasformazione diventava pertanto una codificazione delle varie geometrie. La geometria euclidea del piano, per esempio, è lo studio delle proprietà delle figure, comprese le aree e le lunghezze, che rimangono invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni formato dalle traslazioni e dalle rotazioni nel piano: le cosiddette trasformazioni rigide, equivalenti al tacito assioma euclideo

[24] Si veda COOLIDGE, *History of Geometrical Methods*, pp. 298 ss.

per cui le figure rimangono immutate quando vengono spostate in un piano. Dal punto di vista analitico le trasformazioni rigide nel piano possono essere espresse dalla formula

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

dove $ae - bd = 1$; tali trasformazioni formano gli elementi di un gruppo. L'"operazione" che "combina" due elementi siffatti è semplicemente quella di eseguire le trasformazioni nell'ordine. È facile vedere che, se la suddetta trasformazione è seguita da una seconda trasformazione

$$\begin{cases} x'' = Ax' + By' + C \\ y'' = Dx' + Ey' + F \end{cases}$$

il risultato delle due operazioni eseguite una dopo l'altra è equivalente a un'unica operazione di questo tipo che trasporti il punto (x, y) nel punto (x'', y'').

Se in questo gruppo di trasformazioni si sostituisce la condizione $ae - bd = 1$ con la condizione più generale $ae - bd \neq 0$, le nuove trasformazioni formano anch'esse un gruppo. Tuttavia, le lunghezze e le aree non rimangono necessariamente le stesse, ma una conica di un dato tipo (ellisse, parabola o iperbole) resterà, rispetto a queste trasformazioni, una conica dello stesso tipo. Trasformazioni siffatte, precedentemente studiate da Möbius, sono note col nome di trasformazioni affini; esse caratterizzano una geometria nota con il nome di "geometria affine", così chiamata perché un punto finito diventa un altro punto finito attraverso una qualsiasi trasformazione di questo genere. È chiaro, allora, che la geometria euclidea, dal punto di vista di Klein, rappresenta soltanto un caso particolare di geometria affine. La geometria affine, a sua volta, risulta essere soltanto un caso particolare di una geometria ancor più generale: la geometria proiettiva. Una trasformazione proiettiva può essere espressa nella forma

$$x' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f}, \qquad y' = \frac{Ax + By + C}{dx + ey + f}$$

È chiaro che, se $d = 0 = e$ ed $f = 1$, la trasformazione è affine. Fra le proprietà più interessanti delle trasformazioni proiettive v'è il fatto che: 1) una conica viene trasformata in un'altra conica; 2) il birapporto o rapporto anarmonico rimane invariante. Pappo aveva osservato queste proprietà già da un millennio e mezzo, ma egli non aveva avuto la minima idea del concetto di gruppo che avrebbe reso possibile una classificazione così netta delle diverse geometrie. Di fatto, per Pappo esisteva soltanto *una* geometria: infatti i punti impropri della geometria proiettiva sarebbero stati inconcepibili nell'antichità. Il *Programma di Erlangen* di Klein era così chiaramente un prodotto del XIX secolo che avrebbe perso ogni significato se trasferito a *qualsiasi* periodo precedente. Dapprima esso ebbe soltanto una diffusione limitata, ma entro la fine del secolo giunse a esercitare un vasto influsso sull'intero mondo matematico internazionale[25], influsso che può essere oggi constatato in quasi ogni corso generale di geometria per studenti universitari[26].

16 L'opera di Klein rappresenta, in un certo senso, il culmine dell'"Età eroica della geometria": per mezzo secolo egli svolse ininterrottamente un'attività di insegnamento e di divulgazione. L'entusiasmo da lui comunicato ai suoi allievi fu così contagioso che parecchi matematici di primo piano della fine del XIX secolo si lasciarono andare a fare la profezia che non solo la geometria, ma l'intera matematica, avrebbe finito con l'essere inglobata nella teoria dei gruppi. Tuttavia le ricerche sulla teoria dei gruppi non esaurivano tutta l'opera di Klein. La sua storia della matematica del XIX secolo, pubblicata postuma e diventata un classico nel suo genere[27], rivela le sue profonde conoscenze di tutti gli aspetti di questa scienza. Il suo nome viene oggi ricordato anche nel campo della topologia in connessione con la superficie a una sola faccia nota con il nome di otre, o bottiglia di Klein. Si interessò molto della geometria non-euclidea: fra i suoi contributi in questo campo v'è quello di aver dato il nome di "geometria ellittica" e di "geometria iperbolica" alle geometrie corrispondenti rispettivamente all'ipotesi dell'angolo ottuso e a quella dell'angolo acuto. Per quest'ultimo tipo di geometria non-euclidea egli propose un semplice modello come alternativo rispetto a quello di Beltrami. Immaginiamo che il piano iperbolico sia rappresentato dai punti interni a una circonferenza C del piano euclideo: che la "retta" iperbolica passante per due punti P_1 e P_2 sia rappresentata da quella porzione della retta euclidea P_1P_2 che si trova all'interno di C, e la "distanza" tra i due punti P_1 e P_2 all'interno della circonferenza sia definita dall'espressione

$$\ln \frac{P_2Q_1 \cdot P_1Q_2}{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2}$$

[25] Una traduzione inglese con il titolo "A Comparative Review of Recent Researches in Geometry" apparve nel 1893 nel vol. II del *Bulletin of the New York Mathematical Society*, ora *Bulletin of the American Mathematical Society*.

[26] Si veda, per esempio, ANNITA TULLER, *A Modern Introduction to Geometries*, Princeton, N.Y., D. Van Nostrand Co., 1967.

[27] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 1926-1927.

dove Q_1 e Q_2 sono i punti di intersezione della retta P_1P_2 con la circonferenza C (fig. 24.1). Con una appropriata definizione di "angolo" com-

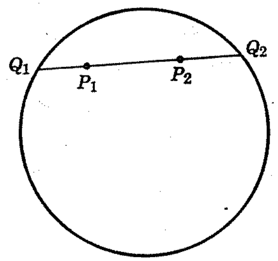


Fig. 24.1

preso tra due "rette", i "punti", le "rette" e gli "angoli" del modello iperbolico di Klein presentano proprietà simili a quelle della geometria euclidea, fatta eccezione per il postulato delle parallele.

Klein fu il più influente insegnante di matematica dopo Monge: oltre a tenere lezioni stimolanti, egli si interessò dell'insegnamento della matematica a diversi livelli ed esercitò un forte influsso sugli ambienti pedagogici. Nel 1886 diventò professore di matematica a Gottinga, e sotto la sua guida quella università diventò la Mecca cui accorrevano da ogni parte del mondo, compresa l'America, gli studenti di matematica più brillanti. Negli ultimi anni della sua vita Klein svolse con molta efficacia il ruolo di "grande statista" del regno della matematica[28]. Così l'età dell'oro della geometria moderna, che aveva avuto un inizio così promettente nella Francia dell'École Polytechnique con l'opera di Lagrange, di Monge e di Poncelet, raggiunse il suo apice in Germania, all'Università di Gottinga, attraverso le ricerche e l'ispirazione di Gauss, di Riemann e di Klein.

[28] Si veda, per esempio, G. A. MILLER, "Felix Klein and the History of Mathematics", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 13, 1927, pp. 611-613.

Bibliografia

BÓLYAI J., *Geometrische Untersuchungen*, a cura di P. Stäckel, B.G. Teubner, Lipsia, 1913.

BONOLA R., *Geometria non euclidea*, Zanichelli, Bologna, 1906.

BOYER C.B., *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, New York, 1956.

CAJORI F., *History of Mathematics*, 2ª ed., Macmillan, New York, 1931.

CHASLES M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie*, Bruxelles, 1837; 2ª ed., Parigi, 1875.

CLEBSCH A., "Notice sur les travaux de Jules Plücker", trad. di P. Mansion, in *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, **5**, 1872, pp. 183-212.

COOLIDGE J.L., "The Heroic Age of Geometry", in *Bulletin of the American Mathematical Society*, **35**, 1929, pp. 19-37.

COOLIDGE J.L., *A History of Geometrical Methods*, Dover reprint, New York, 1963.

DEVRIES HK., "How Analytic Geometry Became a Science", in *Scripta Mathematica*, **14**, 1948, pp. 5-15.

ENGEL F. e STÄCKEL P., *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, B.G. Teubner, Lipsia, 1898-1913, 2 voll.

ERNST W., *Julius Plücker*, Bonn, 1933.

FANO G., "Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert", in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Voll. III, parte 1, prima metà, pp. 223-288; trad. francese in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Tomo III, Vol. 1, pp. 185-259.

KAGAN V., *N. Lobachevsky and his Contribution to Science*, Foreign Languages Publishing House, Mosca, 1957.

KLEIN F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer, Berlino, 1926-1927, 2 voll.

KLEIN F., *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Vol. II, *Geometry*, Dover, New York, 1939.

KÖTTER E., "Die Entwickelung der synthetischen Geometrie, von Monge bis auf Staudt, 1847", in *Jahresbericht der Deutscher Mathematiker-Vereinigung*, **5**, parte 2, 1898-1901.

LORIA G., *Storia delle matematiche*, Sten, Torino, 1929-1935, 3 voll.

LORIA G., *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, 4ª ed., Cedam, Padova, 1931.

NAGEL E., "The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry", in *Osiris*, **7**, 1939, pp. 142-224.

PATTERSON B.C., "The Origins of the Geometric Principle of Inversion", in *Isis*, **19**, 1933, pp. 154-180.

PIERPONT J., "The History of Mathematics in the Nineteenth Century", in *Bulletin of the American Mathematical Society*, **11**, 1904, pp. 136-159.

SCHMIDT F. e STÄCKEL P., a cura di, *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai*, Lipsia, 1899.

SIMON M., "Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert", in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsbände*, 1, 1906.

SMITH D.E., *Source Book in Mathematics*, Dover, New York, 1959.

SOMMERVILLE D.M.Y., *Bibliography of Non-Euclidean Geometry*, Harrison, Londra, 1911.

VUCINICH A., "Nikolai Ivanovich Lobachevskii, "The Man behind the First Non-Euclidean Geometry", in *Isis*, **53**, 1962, pp. 465-481.

25
L'aritmetizzazione dell'analisi

1. La serie di Fourier - 2. La teoria analitica dei numeri - 3. Numeri trascendenti - 4. Difficoltà nell'analisi infinitesimale - 5. Il teorema di Bolzano-Weierstrass - 6. La definizione di numero reale - 7. L'analisi infinitesimale di Weierstrass - 8. La "sezione" di Dedekind - 9. Il concetto di limite - 10. L'influenza di Gudermann - 11. I primi anni della carriera di Cantor - 12. La "potenza" degli insiemi infiniti - 13. Proprietà degli insiemi infiniti - 14. L'aritmetica transfinita - 15. Le critiche di Kronecker all'opera di Cantor - Bibliografia.

1 L'analisi, ossia lo studio dei processi infiniti, era stata concepita da Newton e da Leibniz come una disciplina matematica concernente grandezze continue, quali lunghezze, aree, velocità e accelerazioni, mentre la teoria dei numeri aveva evidentemente come proprio campo di studio quello rappresentato dall'insieme discreto dei numeri naturali. Abbiamo visto, però, che Bolzano aveva tentato di dimostrare con procedimenti puramente aritmetici proposizioni, come il teorema di posizione, che sembravano dipendere dalle proprietà di funzioni continue. Plücker, a sua volta, aveva completamente aritmetizzato la geometria analitica. La teoria dei gruppi originariamente aveva riguardato insiemi discreti di elementi; Klein aveva però concepito la possibilità di unificare sotto il concetto di gruppo sia gli aspetti discreti che quelli continui della matematica. Il XIX secolo fu infatti un periodo in cui vennero stabilite correlazioni fra branche diverse della matematica: l'aritmetizzazione dell'analisi — espressione coniata da Klein nel 1895 — era un aspetto di questa tendenza generale.

Il termine essenziale dell'analisi è, naturalmente, quello di "funzione": fu specialmente in relazione ai tentativi volti a chiarificare questo termine che si affermò la tendenza all'aritmetizzazione. Differenze di opinione circa la rappresentazione delle funzioni si erano già manifestate prima della metà del XVIII secolo, allorché d'Alembert e Eulero avevano presentato soluzioni del problema della corda vibrante espresse nella cosiddetta "forma chiusa", facendo uso di due funzioni arbitrarie, mentre Daniel Bernoulli aveva trovato una soluzione espressa mediante una serie infinita di funzioni trigonometriche. Poiché quest'ultima soluzione sembrava implicare una periodicità, mentre le funzioni arbitrarie di d'Alembert e di Eulero non erano necessariamente periodiche, si credette che la soluzione di Bernoulli fosse meno generale. Ma nel 1824 J.B.J. Fourier dimostrò che ciò non era vero.