Al matematico Weil, che seguiva un suo corso sul concetto di numero, Hilbert sembrò paragonabile al pifferaio magico della fiaba: con l'irresistibile richiamo del dolce flauto lo attirava nel profondo fiume della matematica. L'aneddoto esprime il fascino «estetico» di questa disciplina di cui il volume espone con un linguaggio quanto più possibile piano la storia secolare dall'algebra del Rinascimento al computer.

Umberto Bottazzini insegna Storia della matematica all'Università di Bologna. È autore di numerosi lavori sull'analisi matematica nell'Ottocento. Fa parte dell'Executive Committee dell'International Commission on the History of Mathematics, responsabile della pubblicazione della rivista «Historia Mathematica». È inoltre membro dell'Editorial Board della rivista «Archive for History of Exact Science».

In copertina: Particolare della tavola XXIV della Géometrie descriptive di Gaspard Monge (Parigi, 1801).

1/

L. 65.000 PREZZO DI VENDITA AL PUBBLICO



UMBERTO BOTTAZZIN

omiemjo

UTET Libreria UMBERTO BOTTAZZINI

# DI HILBERTE

Storia della matematica moderna e contemporanea



C.F. Gauss, Werke, a cura della Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, Teubner, 1900 e 1903, vol. 8, 9.

H. von Helmholtz, Opere, a cura di V. Cappelletti, Torino, UTET, 1967.

I. Kant, Kritik der reinen Vernunft, 1781 (trad. it. Critica della ragion pura, a cura di G. Lombardo Radice, Bari, Laterza, 1910).

N.I. LOBACEVSKIJ, Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele, Kazan 1835-38 (trad. it. a cura di L. Lombardo Radice, Torino, Boringhieri, 1974).

B.G.F. RIEMANN, Gesammelte mathematische Werke, New York, Dover, 1953.

G. SACCHERI, Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, Milano, Paolo Antonio Montano, 1733 (trad. ingl. a cura di G.B. Halsted, reprint New York, Chelsea, 1986).

Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, a cura di F. Engel e P. Staeckel, Leipzig, Teubner, 1899-1913, 2 voll. (reprint New York, Johnson reprint corporation, 1972).

H. WEYL, Raum - Zeit - Materie, Berlin, Springer, 1918 (trad. ingl., 1922, reprint New York, Dover, 1952).

ID., Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin, Springer, 1923.

## Studi

R. Bonola, La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo, Bologna, Zanichelli, 1906 (reprint Bologna, Zanichelli, 1975).

P. Dombrowki, 150 Years after Gauss' «Disquisitiones generales circa superficies curvas» — with the original text of Gauss, in «Asterisque», vol. 62, 1979.

F. Engel e P. Staeckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, Leipzig, Teubner, 1895, 2 voll.

J.J. Gray, Non-euclidean geometry — A re-interpretation, in «Historia Mathematica», vol. 6, 1979, pp. 236-258.

ID., Ideas of space, Oxford, Clarendon Press, 1979.

ID., Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré, Basel, Birkhäuser, 1986.
 ID. e L. TILLING, Johann Heinrich Lambert, mathematician and scientist, 1728-1777, in «Historia Mathematica», vol. 5, 1978, pp. 13-41.

T. HAWKINS, Non-euclidean geometry and weierstrassian mathematics: the background to Killing's work on Lie algebras, in «Historia Mathematica», vol. 7, 1980, pp. 289-342.

L. KÖNIGSBERGER, Hermann von Helmholtz, Oxford, Clarendon Press, 1906 (reprint New York, Dover, 1965).

G. LORIA, Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche, in «Bibliotheca Mathematica», 3 ser., vol. 2, 1901, pp. 392-440.

K. REICH, Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann, in «Archive for History of Exact Sciences», vol. 11, 1973, pp. 273-382.

E. Scholz, Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré, Basel, Birkhäuser, 1980.

D.M.Y. SOMMERVILLE, Bibliography of non-euclidean geometry, London, Harrison & Sons, 1911 (reprint New York, Chelsea, 1970).

M. SPIVAK, A comprehensive introduction to differential geometry, Boston, Publish or Perish, 1970, vol. II.

P. STAECKEL, Gauss als geometer, in GAUSS, Werke, cit., vol. 10, Part 2.

R. TORRETTI, The philosophy of geometry from Riemann to Poincaré, Dordrecht, Reidel, 1978.

# X. La geometria delle proiezioni e delle sezioni

Allo stato attuale della scienza chiunque volesse potrebbe generalizzare e creare in geometria; non è più indispensabile il genio per aggiungere una pietra all'edificio.

CHASLES

1. Le proprietà proiettive delle figure. - 2. La discussione sui «principi». - 3. La scuola napoletana. - 4. L'indirizzo sintetico: Steiner e von Staudt. - 5. L'indirizzo analitico: Möbius e Plücker.

# 1. Le proprietà proiettive delle figure.

Nel 1812 il giovane «politecnico» Victor Poncelet era stato arruolato come ufficiale del genio nell'armata napoleonica che partiva per la spedizione contro la Russia. Rimasto prigioniero durante la disastrosa e drammatica ritirata della Grande Armata, Poncelet trascorse quasi due anni nel carcere russo di Saratov. Nelle lunghe giornate della prigionia, «privo di ogni specie di libri», egli aveva cominciato a ripensare agli antichi insegnamenti di geometria ricevuti da Monge all'École Polytechnique e a quanto aveva imparato dallo studio della Géométrie de position (1803), il libro in cui Lazare Carnot aveva mostrato come si potesse fare della geometria senza ricorrere ai «geroglifici dell'analisi».

Di particolare interesse nella *Géométrie de position* era quella «teoria delle figure correlative» che riprendeva l'idea di Monge delle «relazioni contingenti» tra figure e prometteva di essere feconda, per conferire la necessaria generalità ai metodi geometrici. Del resto, qual era stata, da sempre, la «debolezza» ma anche il fascino della geometria? Il fatto che, fin dall'antichità, i problemi erano stati affrontati con tecniche particolari, che avevano successo caso per caso. In fondo, la grande idea di Descartes era stata proprio quella di mostrare che anche i problemi geometrici si potevano trattare con metodi (algebrici) generali e uniformi.

Ma in tempi recenti Monge aveva insegnato che le conoscenze algebriche diventavano sempre meno indispensabili e che la geometria descrittiva poteva addirittura «raggiungere le vette dell'analisi algebrica» e la stessa generalità nei suoi metodi.

«Non era infatti evidente, si chiedeva Poncelet, che le proprietà e le relazioni trovate per un primo sistema di figure geometriche restano applicabili ai successivi stati del sistema, purché però si faccia attenzione a particolari modificazioni che sono potute verificarsi»?

Le proprietà « descrittive » di una figura qualunque, « in una posizione generale e in qualche senso indeterminata », si conservavano per delle trasformazioni « insensibili » e continue della figura, almeno fino a un determinato punto in cui esse venivano chiaramente meno: ecco il principio, « la legge di continuità » come lo chiamò Poncelet, con cui i suoi maestri, da Monge a Carnot, avevano cercato di conferire generalità alle loro concezioni. Le proprietà interessanti non erano solo quelle « descrittive » come aveva insegnato Monge, ma più in generale quelle « proiettive », pensò Poncelet, quelle che sono indipendenti dalle « dimensioni » e

rimangono invariate quando si proietta la figura su un nuovo piano mediante rette concorrenti in un punto, il centro di proiezione. «I principi della "proiezione centrale" delle figure in generale e delle coniche in particolare, le proprietà delle secanti e delle tangenti comuni a due curve, quelle dei poligoni iscritti e circoscritti ad esse e così via»: questi erano i «teoremi fondamentali» cui Poncelet (1822, v) era giunto nel corso delle sue riflessioni a Saratov e su cui si basava il suo studio puramente geometrico (o sintetico, come si dice abitualmente) delle proprietà delle coniche

Al ritorno in Francia nel 1814 Poncelet portò con sé diversi quaderni di considerazioni e risultati, dalla cui sistemazione e pubblicazione fu tuttavia distratto per i molti compiti che continuamente gli derivavano dal suo lavoro di

ingegnere militare.

All'inizio del secolo la geometria descrittiva e proiettiva costituiva un vasto campo di ricerca, cui Monge aveva avviato molti dei suoi più promettenti allievi come Charles Brianchon (1785-1864), che nel 1806, ancora studente, aveva dimostrato col metodo delle polari che le tre rette congiungenti a due a due i vertici opposti di un esagono circoscritto a una conica si incontrano in uno stesso punto.

Poncelet aveva certo avuto notizia del teorema di Brianchon prima di lasciare la Francia ed aveva egli stesso applicato quel metodo alla teoria delle coniche. Ma al ritorno a Parigi scoprì che parecchi suoi risultati erano stati nel frattempo già trovati. Egli anticipò qualcuno dei suoi teoremi negli «Annales» del suo amico Gergonne, ma solo nel 1820 presentò all'Académie una lunga memoria in cui esponeva in maniera sistematica il frutto delle sue lontane ricerche. Cauchy ne scrisse un lungo rapporto, che a sua volta fu pubblicato negli «Annales». L'autorevole analista riconosceva apertamente l'importanza dei risultati di Poncelet; tuttavia, quanto ai metodi, dissentiva decisamente dall'uso della «legge di continuità » come argomento dimostrativo. «A voler esser precisi, scriveva Cauchy, questo principio non è che un'induzione forte, mediante la quale si estendono teoremi, inizialmente dimostrati sotto certe restrizioni, a dei casi in cui tali restrizioni vengono meno» (in Poncelet 1822, ix).

È vero che le applicazioni date da Poncelet portano a risultati esatti, ammetteva Cauchy, «nondimeno noi non pensiamo che un tale principio possa essere generalmente ammesso e indistintamente applicato a qualunque tipo di questione, né in geometria, e neppure in analisi». Altro che strumento per raggiungere le «vette dell'analisi»! «Se si fa troppo affidamento su di esso — aggiungeva Cauchy

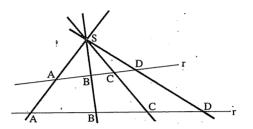
- si potrà talvolta cadere in errori manifesti».

Il contrasto originato dalla «legge di continuità» aveva in realtà radici più profonde, in due concezioni radicalmente diverse della matematica. Mentre Cauchy in quegli anni cominciava a maturare il suo programma di eliminazione dall'analisi di ogni ambiguo ricorso all'intuizione geometrica, Poncelet non solo rivendicava ai metodi geometrici la stessa generalità e dignità scientifica di quelli analitici, ma nella sua memoria prefigurava un ruolo privilegiato alla geometria sintetica all'interno dello sviluppo della matematica.

La discussione sulla legge di continuità annunciava dunque un motivo di costante dibattito nella matematica dell'Ottocento, che toccherà in alcuni casi punte di grande asprezza polemica.

La memoria di Poncelet apparve nel 1822 col titolo Traité des propriétés projectives des figures, un volume che segnò la nascita della geometria projettiva come ramo della matematica con metodi e obiettivi propri. Nel Traité egli ordinava in maniera sistematica non solo i suoi risultati, ma anche i teoremi di natura proiettiva trovati dai geometri dell'antichità, da Desargues. Pascal e dai loro più recenti continuatori.

Il Traité si apriva con la definizione del fondamentale concetto di rapporto armonico di quattro punti, già considerato da Pappo nelle Collezioni matematiche: date quattro rette uscenti da uno stesso punto S, ogni trasversale r le incontra in 4



punti il cui rapporto armonico (o *birapporto*, come si dice oggi) AC AD è costante al variare della trasversale r. Ad essa faceva seguito l'analogo concetto di

fasci (di rette) armonici, introdotto da Brianchon.

Poncelet dimostrava le proprietà delle corde e dei diametri di una conica e introduceva poi due concetti fondamentali in tutta la sua trattazione, quelli di polo e polare di una conica. Per un punto P esterno alla conica (polo), la sua polare rispetto alla conica sarà la retta passante per i punti di contatto delle tangenti condotte da P alla conica. Una costruzione che viene meno quando P è interno alla conica.



Ma, «al fine di conservare l'analogia tra le idee e il linguaggio» — e poter definire quindi in tutta generalità la nozione di polo e polare — Poncelet chiama «immaginari» i punti di intersezione di una secante quando essa non taglia più la conica (secante ideale).

Ideale, dice Poncelet chiamando in causa il suo «principio di continuità», è ciò che «è pensato provenire dalla prima figura con un movimento progressivo e continuo di qualche parte, senza violare le leggi primitive del sistema» (Ibid., 28). Non si tratta di un semplice trucco linguistico, afferma Poncelet, ma di un modo che consente di «stabilire relazioni, se non sempre reali, almeno fittizie (fictives) tra figure che a prima vista non sembrano averne alcuna tra loro, e scoprire facilmente relazioni e proprietà comuni ad esse» (*Ibid.*).

Se si ammettono enti immaginari e ideali spariscono quei paradossi geometrici che sembrano derivare dall'analisi algebrica. Così per esempio, continua Poncelet, tutti i cerchi del piano «hanno idealmente due punti immaginari comuni all'infinito» (punti ciclici). Tali punti stanno su una retta all'infinito (retta impropria). Il che dà conto del fatto che si trovano 4 valori (reali e immaginari) per le coordinate, quando si determinano i punti di intersezione di due cerchi qualunque coi metodi dell'analisi.

Il metodo della proiezione centrale consente poi di studiare le proprietà generali delle coniche, riconducendole a quelle dei cerchi poiché le coniche si possono pensare in generale ottenute come proiezioni di cerchi.

Poncelet lavorava nel piano reale, completato con elementi all'infinito (punti e rette improprie), ma la considerazione di elementi ideali e immaginari gli consentiva di servirsi per lo studio delle coniche di una strumentazione equivalente di fatto all'estensione del piano reale al cosiddetto piano proiettivo complesso.

Nella sezione II del *Traité* Poncelet passava a trattare la «geometria della retta e delle trasversali», considerando le proprietà di triangoli, quadrilateri e più in generale figure omologiche, ottenute cioè da una data figura con una sola operazione di proiezione o sezione (*prospettività*) o con una sequenza di tali operazioni (*proiettività*). Egli vi enunciava il teorema dei triangoli omologici di Desargues e le proprietà dell'involuzione di 6 punti, dovute ancora a Desargues.

Poncelet riprendeva poi le considerazioni su poli e polari di una conica, evidenziando la dualità dei due concetti. Il metodo delle polari reciproche, termine con cui Poncelet indicava la dualità «punto-retta» nel piano, forniva al geometra francese uno strumento essenziale per lo studio delle proprietà delle coniche. Su di esso si basava per esempio la dimostrazione del teorema che, dato un punto P e la sua polare p rispetto a una conica, le polari di un punto M che si muove su p descrivono un fascio di rette di centro P, o la dimostrazione della natura «duale» dei teoremi sull'esagono di Pascal e di Brianchon. O ancora, il fatto che esiste una sola conica tangente a cinque rette date, enunciato «duale» del teorema che per cinque punti passa una sola conica. Una conica si poteva dunque considerare non solo come un certo luogo di punti, ma anche, dualmente, come un certo inviluppo di rette, dove il concetto di punto di contatto in un inviluppo traduceva dualmente il concetto di tangente ad una curva in un punto.

Ancora col metodo delle polari reciproche Poncelet studiava le proprietà di due curve mutuamente polari, cioè «due curve nel piano di una conica, tali che i punti di una sono i poli delle tangenti all'altra e viceversa» (*Ibid.*, 123), di modo che ognuna delle due curve può essere considerata come l'inviluppo delle polari dei punti dell'altra o, dualmente, il luogo dei poli delle tangenti all'altra.

Infine nella terza sezione del *Traité* Poncelet considerava sistemi di coniche omologiche, cioè coniche di uno stesso piano che si corrispondono in una trasformazione proiettiva (non identica) che lascia fermi tutti i punti di una retta (asse di omologia) e tutte le rette di un fascio, il cui sostegno è detto centro di omologia.

Egli determinava le proprietà di coppie di coniche omologiche e infine studiava le relazioni tra secanti e tangenti comuni a due coniche. In questo contesto dimostrava il suo celebre teorema di «chiusura»: se C e C<sub>1</sub> sono due coniche ed esiste un poligono di n lati «interscritto» tra esse, cioè circoscritto a C<sub>1</sub> e iscritto in C, allora ne esistono infiniti, in altre parole per ogni punto P di C esiste un poligono di n lati che ha P come uno dei vertici ed è «interscritto» alle due coniche. Un teorema che sarà ripreso da molti autori nel corso dell'Ottocento, da Jacobi a Steiner ai numerosi altri che ne hanno dato varianti e generalizzazioni.

Dopo la pubblicazione del *Traité* Poncelet fu sempre più assorbito da compiti che lo allontanarono dalla ricerca geometrica attiva, come fare l'ispettore delle manifatture per conto del governo o insegnare nella scuola di applicazioni a Metz — dove l'insegnamento della meccanica lo motivò a scrivere un *Traité de mécanique industrielle* (1829) — o infine lavorare per il comitato di Difesa nazionale, scrivendo rapporti tecnici sulle fortificazioni.

Solo nel 1862, quando la geometria proiettiva rappresentava ormai uno dei rami più fiorenti della matematica, apparvero le Applications d'analyse et de géométrie in due volumi, dove Poncelet raccoglieva le sue note redatte a Saratov che rivelavano come il geometra, pur non servendosi di metodi analitici nei Traité, ne avesse fatto uso sistematico per provare la solidità dei teoremi (come quelli derivati dal principio di continuità) dimostrati in maniera sintetica nel Traité.

# 2. La discussione sui «principi».

Molti geometri avevano osservato che teoremi relativi a figure in un piano rimanevano veri se si scambiavano tra loro le parole «punto» e «retta» che comparivano nei loro enunciati. Poncelet pensava di averne trovato la ragione profonda col suo metodo delle «polari reciproche», che tuttavia implicava il riferimento a una conica.

Nel 1826 Gergonne risollevò la questione, scrivendo in un articolo apparso negli «Annales» che la «dualità» (termine da lui introdotto allora) di punto e retta aveva natura più generale e riguardava tutti gli enunciati che non implicavano proprietà metriche. Così, per fare un esempio elementare, l'enunciato: «per due punti del piano passa una retta e una soltanto» si traduceva dualmente nell'enunciato: «due rette del piano si incontrano in un punto e uno soltanto» (a meno di essere coincidenti). Qui, diceva Gergonne, non erano certo coinvolte delle coniche.

Gergonne formulava tuttavia in termini abbastanza vaghi il suo principio generale di dualità, la cui natura «universale» egli non era peraltro in grado di provare. Poncelet da parte sua ribatté che la vera natura della dualità era spiegata dal suo principio delle polari reciproche, della cui fecondità aveva dato ulteriori prove in una memoria presentata all'Académie nel 1824. Nel suo articolo Gergonne non aveva fatto altro che tentare di appropriarsi di un'idea non sua, battezzandola col termine «dualità».

L'accusa di plagio provocò l'accendersi di una vivace polemica, che ebbe come esito di attirare l'attenzione dei geometri sulla natura dei «principi» della

geometria proiettiva. Anche l'Académie des Sciences di Bruxelles mise a concorso per il 1829 un premio per un «esame filosofico dei diversi metodi usati nella geometria recente, e particolarmente, del metodo delle polari reciproche».

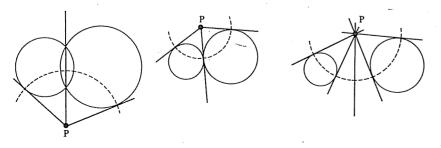
Il premio fu attribuito a Michel Chasles (1793-1880), un matematico che ancora studente dell'École Polytechnique si era segnalato per delle ricerche geometriche originali e, in seguito, aveva pubblicato negli «Annales» di Gergonne diversi articoli sulle quadriche in cui estendeva il metodo della proiezione stereografica allo studio di superfici di 2° ordine.

La Mémoire de géométrie sur les deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie colla quale Chasles vinse il concorso apparve nel 1837, preceduta da un vasto Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie di oltre 500 pagine, corredato da una quantità di note dove le precisazioni storiche e bibliografiche si alternano a contributi teorici originali sui più recenti sviluppi, come la teoria delle quadriche, la teoria delle cubiche piane e gobbe o lo studio delle coniche e dell'involuzione di sei punti a partire dalle proprietà del birapporto («rapporto anarmonico», nella sua terminologia) di 4 elementi.

L'Aperçu di Chasles è un'esposizione profonda e dettagliata della storia della geometria dall'antichità fino all'opera di Poncelet, che ancora oggi rappresenta un utile strumento per lo studio della geometria classica.

Nell'ultima parte dell'*Aperçu* Chasles interveniva nella discussione sui metodi della geometria con una angolatura teorica del tutto originale. Egli cominciava a sgombrare il campo dalle suggestioni metafisiche implicite nell'espressione leibniziana «legge di continuità» adottata da Poncelet proponendo di ritornare all'originaria denominazione di «principio delle relazioni contingenti» proposta da Monge, che aveva il merito di essere più aderente alla reale natura del principio. Nello studio geometrico delle figure e delle loro relazioni ci sono infatti delle proprietà intrinseche e permanenti, che servono a definire e costruire le parti essenziali di una figura, osservava Chasles, mentre altre, secondarie e contingenti, «possono venir meno o diventare immaginarie in certe circostanze della costruzione della figura» (Chasles 1837, 205).

Dato per esempio un sistema di due cerchi nel piano, esiste una certa retta (asse radicale) che ha una grande importanza teorica per il sistema. Se i due cerchi si tagliano, tale retta è data dal prolungamento della loro corda comune e si può facilmente costruire. Ma questa è una circostanza contingente e accidentale. Anche quando i cerchi non si tagliano più, infatti, l'asse radicale continua a esistere,



caratterizzato dalla proprietà permanente che le tangenti condotte da un qualunque suo punto ai due cerchi sono uguali tra loro, ossia ogni punto di tale retta si può considerare come il centro di una circonferenza che taglia ortogonalmente i due cerchi dati. In questa ricerca delle proprietà intrinseche e permanenti delle figure, cui si è condotti dal venir meno delle caratteristiche accidentali, risiede la natura profonda del «principio», che consente di enunciare le teorie geometriche con la necessaria generalità, e al tempo stesso di dar conto dell'uso del termine «immaginario» in geometria pura. Immaginario, dice Chasles, è «un ente di ragione, senza esistenza» ma che si può supporre dotato di certe proprietà, sulle quali si ragiona come se fosse «un ente reale e palpabile». È un'idea «a prima vista forse oscura e paradossale», ma che proprio nella teoria delle relazioni contingenti acquista un senso «chiaro, preciso e legittimo». Sono dunque «le relazioni e le proprietà che abbiamo chiamato contingenti a fornire la chiave degli immaginari in Geometria» (1837, 368).

Quanto al metodo delle polari reciproche, di cui Poncelet si era servito, non era certo il solo che serviva allo scopo. La dualità era stata infatti riconosciuta da più di due secoli nella geometria della sfera, scriveva Chasles, e Monge ne aveva fatto uso sistematico nelle sue *Applications de l'analyse à la géométrie*.

Sia il metodo di Poncelet, sia altri usati nello studio delle superfici di 2° ordine e delle curve date dalle loro intersezioni, hanno rivelato l'esistenza di due principi generali, continuava Chasles, «ai quali tutti i metodi si ricollegano e che costituiscono le due dottrine generali della deformazione e della trasformazione delle figure» (1837, 254).

Tali «dottrine» trovavano la principale «utilità» in un principio di grande generalità, «che le renderà applicabili a numerose questioni nuove». «Questo principio, continuava Chasles, si basa su un'unica relazione, alla quale sarà sufficiente ricondurre sempre tutte le altre. Questa relazione è quella di rapporto anarmonico [birapporto] di quattro punti o di un fascio di quattro rette. Ecco il tipo unico di tutte le relazioni trasformabili mediante i due principi» sopra richiamati (1837, 255). La legge di corrispondenza tra una figura e la trasformata consiste appunto nell'uguaglianza dei birapporti corrispondenti.

Era dunque la nozione di birapporto ad acquisire, con Chasles, un ruolo centrale e fondamentale sia nella teoria delle trasformazioni di figure correlative (per la quale Chasles adottava il nome di «dualità») sia nella teoria della deformazione delle figure secondo il principio d'omografia (come avviene per esempio quando due figure piane sono una la prospettiva dell'altra). La Mémoire che faceva seguito all'Aperçu conteneva appunto la trattazione matematica di queste due «dottrine generali». In essa anziché attenersi al purismo geometrico del Traité di Poncelet, Chasles rivelava la fecondità dell'interazione tra pensiero geometrico e metodi analitici.

I «principi» di dualità e d'omografia e i metodi di trasformazione che ne derivano, «sono altrettanti strumenti sicuri, degli stampi per così dire, che servono per creare a volontà delle verità geometriche» era la conclusione di Chasles, le cui parole assumevano il tono di un vero e proprio programma per la nuova geometria. Se si considera una figura qualunque nello spazio e una delle sue proprietà note,

egli affermava, e si applica poi uno di questi metodi di trasformazione tenendo conto delle modificazioni che subisce il teorema che esprime quella proprietà, si otterrà come risultato una nuova figura e una proprietà che corrisponde a quella di partenza. Ecco la peculiare capacità di questi metodi «di moltiplicare all'infinito le verità geometriche», che li rendeva assimilabili alle formule e trasformazioni algebriche e costituiva «il carattere distintivo della geometria moderna» (1837, 268) rispetto a quella degli Antichi!

L'Aperçu segnalò Chasles come uno dei più brillanti geometri francesi. Nel 1846 alla Sorbona fu istituita per lui una cattedra di geometria superiore e il Traité de géométrie supérieure (1852) in cui raccolse le sue lezioni rappresentò, insieme all'Aperçu, uno dei testi più influenti per generazioni di matematici. L'insegnamento fornì inoltre a Chasles continui stimoli alla ricerca, i cui risultati — ivi compresi i primi capitoli di una nuova branca della geometria, la geometria «numerativa» — furono presentati in innumerevoli note dei «Comptes Rendus» dell'Académie. La sua ampia produzione scientifica culminò infine nel Rapport sur les progrès de la géométrie (1870), scritto per conto del governo e prosecuzione ideale dell'Aperçu.

# 3. La scuola napoletana.

Nell'Aperçu di Chasles erano ripetutamente citati i lavori di un gruppo di geometri napoletani guidati da Nicola Fergola (1735-1824), ai quali il geometra francese dava atto di avere nelle loro opere ristabilito l'analisi geometrica degli Antichi «nella sua purezza originaria».

Fergola fu geometra certamente abile e creativo, autore di pregevoli memorie di geometria sintetica e di due trattati, uno sulle sezioni coniche (1814) e uno sui «luoghi solidi» (1818) ma anche di una singolare *Teorica dei miracoli* (!) che la dice lunga sulle sue convinzioni scientifiche e culturali.

La «scuola» riunita attorno a lui presentava caratteristiche del tutto peculiari rispetto al contemporaneo sviluppo della matematica italiana del tempo in città come Pavia o Torino, dove particolarmente sentita era l'influenza della cultura francese e i giovani matematici studiavano con entusiasmo non solo Lagrange o Laplace, ma i più recenti lavori di Fourier e Poisson, Cauchy e dei geometri allievi di Monge. L'attenzione dei geometri napoletani era invece rivolta essenzialmente alle opere dei classici, ai testi di Euclide, di Pappo e Apollonio e dei loro commentatori antichi e «moderni», cioè sei-settecenteschi, cui si accompagnava una ostile diffidenza, se non un'aperta avversione, per i metodi analitici di Lagrange e degli altri «géomètres» francesi.

Una scelta che finì per tarpare le ali non solo a Fergola, ma soprattutto al suo migliore allievo, Vincenzo Flauti (1782-1863), che delle concezioni del maestro fu rigido e ostinato difensore. Nel 1810 Flauti curò un'edizione degli *Elementi* di Euclide, che doveva costituire il fondamento di tutto l'insegnamento di matematiche dei giovani nei collegi del Regno borbonico.

Di più ampio respiro teorico fu la sua Geometria di sito (1815), ampiamente menzionata da Chasles, dove, in un linguaggio e in una forma classici, Flauti presentava diversi risultati di geometria descrittiva e uno studio approfondito delle superfici rigate e del «cilindroide wallisiano», cioè del cono-cuneo di Wallis, un tema ricorrente nelle ricerche del gruppo napoletano.

Testimonianza del buon livello raggiunto nelle tecniche della geometria sintetica dagli allievi di Fergola era anche la soluzione della generalizzazione di un problema di Pappo: «Iscrivere in un cerchio un triangolo i cui lati passino per tre punti dati», un problema che era stato riproposto da Castillon (1709-1791) a Cramer e che aveva attirato l'attenzione di Euler e Lagrange. In un lavoro assai apprezzato da Carnot, Chasles e Poncelet il giovane Annibale Giordano (1769-1859) riuscì nel 1783 a risolvere il problema d'iscrivere in una conica un poligono i cui lati passino per altrettanti punti dati.

L'arroccamento in difesa della tradizione degli Antichi e l'intransigente chiusura al nuovo della «scuola sintetica», come si era definita quella di Flauti, favorì la costituzione di una «scuola analitica» ad essa contrapposta, i cui principali esponenti furono F. Tucci (1790-1875) e F. Padula (1815-1881). Il contrasto fra le due scuole portò Flauti a lanciare una patetica sfida matematica nel 1839, perché il pubblico colto del Regno delle Due Sicilie potesse valutare la superiorità di una delle due scuole. Tutto ciò servì al più a rilevare le qualità matematiche di N. Trudi (1811-1884) che risolse due dei tre problemi proposti da Flauti (il terzo era impossibile, come venne ben presto in chiaro, con evidente discredito del proponente).

Il definitivo affrancamento dai vincoli teorici di una tradizione intesa in maniera soffocante avvenne anche per l'influenza esercitatà sui geometri napoletani da Steiner e Jacobi, che soggiornarono per qualche tempo a Napoli nel 1844 così come farà in seguito J. Sylvester, i quali esortarono i giovani interlocutori a orientarsi verso le nuove problematiche geometriche già fiorenti in Europa.

# 4. L'indirizzo sintetico: Steiner e von Staudt.

Quando Jacob Steiner (1796-1863) visitò Napoli insieme a Jacobi era uno dei più autorevoli geometri tedeschi, professore all'università di Berlino e membro della locale Accademia delle Scienze. Steiner era nato in Svizzera da un'umile famiglia di contadini e fin verso i 19 anni sapeva solo scrivere a malapena. A quell'età cominciò a frequentare, vincendo l'opposizione paterna, la scuola di Pestalozzi a Iferten. Steiner fu impressionato dai metodi «socratici» del celebre educatore, che abituavano gli allievi a «fare da soli» sotto la guida e lo stimolo dei docenti. Anche nell'insegnamento della matematica un ruolo prevalente era assegnato all'intuizione geometrica. Steiner riuscì ben presto a eccellere e entrò a far parte dei docenti di matematica della scuola.

Dal 1818 frequentò per qualche semestre i corsi di matematica all'università di Heidelberg prima di trasferirsi a Berlino, dove riuscì a ottenere un posto nella *Gewerbeschule* (Scuola tecnica). A Berlino Steiner entrò in contatto coi giovani matematici riuniti attorno a Crelle, conobbe Abel e strinse una profonda e duratura amicizia con Jacobi. I lavori geometrici pubblicati nel «Journal» di Crelle lo segnalarono al mondo matematico tedesco: l'università di Königsberg gli conferì

una laurea in matematica *honoris causa* e nel 1835 fu infine chiamato dall'università di Berlino, grazie alla protezione di Crelle e von Humboldt, come professore straordinario. Nell'insegnamento egli si ispirò ai metodi di Pestalozzi, che estremizzò al punto da escludere il ricorso a figure, giacché gli enti e le proprietà geometriche si dovevano «vedere» e dominare col pensiero.

Intransigente fautore dei metodi sintetici, Steiner si oppose con vigore all'approccio analitico che era invece alla base delle contemporanee ricerche di Plücker (v. oltre). Il contrasto tra le due «scuole» raggiunse i toni astiosi di una lotta personale, coniugando insieme gli aspetti della discussione scientifica, della polemica ad personam e dell'opposizione tra il centro, Berlino — dove prevaleva l'indirizzo di Steiner, con l'autorevole e incondizionato appoggio di Jacobi — e la «periferia», Bonn, dove Plücker insegnò dal 1836 matematica e fisica. Un contrasto e una polemica fra scuole i cui echi erano ancora ben vivi alla fine dell'Ottocento, come testimoniava Klein (1926, 116).

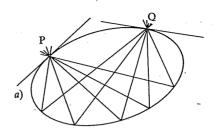
L'approccio di Steiner alla geometria proiettiva emerge chiaramente dalla sua principale opera, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander (Sviluppo sistematico della dipendenza reciproca delle figure geometriche, 1832), prima e unica parte pubblicata di un vasto progetto di sistemazione della geometria originariamente pensato in cinque parti.

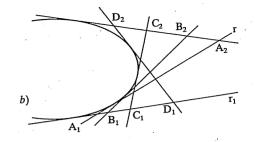
Lo strumento fondamentale per quest'opera di sistemazione teorica era per Steiner l'idea di generazione proiettiva delle figure, a partire da proiettività tra forme fondamentali, le cosiddette forme geometriche di I, II, III specie. Se si considerano come elementi primitivi il punto, la retta e il piano, le forme fondamentali sono a) la retta punteggiata, il piano e lo spazio punteggiati, in cui l'elemento generatore è il punto; b) il fascio di piani, la stella di piani e lo spazio di piani, dove l'elemento generatore è il piano, e infine c) il fascio di rette, il piano di rette (piano rigato) e la stella di rette, tutti generati dalla retta.

A seconda del numero di coordinate necessarie per determinare un elemento in una forma si hanno, con Steiner, forme di I specie (punteggiata e i due fasci), di II specie (piano rigato e punteggiato e le due stelle) e di III specie (spazio di punti e di piani). Già la suddivisione in forme evidenziava la natura duale degli enti (punto-retta nel piano, punto-piano nello spazio). L'uso metodico della dualità (evidenziato anche dalla stampa su due colonne) era infatti una delle caratteristiche dell'*Entwicklung* di Steiner.

Una proiettività (una trasformazione omografica, nella terminologia di Chasles) tra forme di prima specie era definita da Steiner come una trasformazione biunivoca tra gli elementi delle due forme che conservava il birapporto. A partire da tale concetto Steiner passava allo studio sistematico delle coniche, considerate come proiettivamente generate da due fasci di rette. Infatti, i punti d'intersezione di rette corrispondenti in due fasci proiettivi, situati in un piano e non sovrapposti, generano una conica che passa per i centri dei due fasci (v. fig. a) e dualmente, le rette congiungenti punti corrispondenti di due punteggiate proiettive, situate in uno stesso piano ma non sovrapposte, inviluppano una conica che ha per tangenti le due rette punteggiate (v. fig. b).

Lo stesso metodo di generazione era poi applicato da Steiner allo studio delle





quadriche rigate, di cui mostrava le principali proprietà. Le costruzioni di Steiner possedevano una grande eleganza geometrica, ma la loro completezza era limitata dal rifiuto del geometra tedesco di prendere in considerazione elementi «immaginari», che egli sprezzantemente chiamava i «fantasmi» e «le ombre della geometria».

Un ulteriore contributo allo sviluppo della geometria sintetica era il libretto: Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises (Le costruzioni geometriche eseguite mediante la retta e un cerchio fisso, 1835) in cui Steiner mostrava come si potessero risolvere tutti i problemi di secondo grado con la riga e un compasso ad apertura fissa.

Nella seconda fase della sua vita scientifica, da quando cominciò ad insegnare all'università, Steiner non dimostrò la stessa forza inventiva che aveva caratterizzato i suoi primi lavori. Egli presentò sì numerosi risultati sulla teoria delle superfici (di 3° e 4° ordine), spesso solo enunciati senza dimostrazione, ma non riuscì a portare a termine l'ambizioso progetto annunciato nella *Entwicklung* e i suoi contributi si fecero sempre più occasionali, quando non furono direttamente ripresi da lavori di altri.

A parte la considerazione degli immaginari, c'era un'evidente «ombra» nel purismo geometrico di Steiner, che si proiettava attraverso tutta la sua *Systematische Entwicklung*, il fatto cioè che il birapporto di quattro elementi fosse definito in maniera metrica.

La lunghezza di segmenti (o l'ampiezza di angoli) — colle quali si definiva il birapporto — non erano certo proprietà proiettive: se si voleva conferire all'edificio della nuova geometria un carattere *puramente geometrico* bisognava bandire dalla sua costruzione ogni riferimento metrico. A questo compito si dedicò Christian von Staudt (1798-1867), l'«Euclide dell'Ottocento» come fu talvolta chiamato. Allievo per qualche tempo di Gauss a Gottinga, von Staudt insegnò a Würzburg e al politecnico di Norimberga, prima di trasferirsi definitivamente ad Erlangen nel 1835.

Nella quiete della cittadina tedesca von Staudt maturò la profonda revisione dei fondamenti della geometria proiettiva che rese nota nel volume *Geometrie der Lage* (Geometria di posizione, 1847) e nei successivi *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Contributi alla geometria di posizione), apparsi in tre fascicoli tra il 1856 e il 1860. La purezza stilistica e il rigore geometrico fecero dei lavori di von Staudt un modello insuperato nella trattazione sintetica della geometria proiettiva.

Per liberare la nozione di birapporto da ogni riferimento metrico e fondare su

basi puramente proiettive la geometria proiettiva egli si servì nella Geometrie der Lage di un peculiare calcolo con i Würfe, dove il termine Wurf (tetrade) fu scelto proprio per sottolineare la differenza concettuale esistente tra la propria e la nozione classica di birapporto. Così, per esempio, fissati arbitrariamente su una retta tre punti  $0,1,\infty$ , il Wurf formato con essi da un punto P della retta, determinato con una costruzione geometrica che in realtà risaliva a Möbius, era assunto da von Staudt come coordinata proiettiva di P.

Definite poi in maniera geometrica le operazioni sulle coordinate, dati quattro punti di coordinate  $x_1,...,x_4$  era quindi possibile considerare il Wurf  $\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}:\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}$  definito in termini puramente proiettivi.

Era questo lo strumento fondamentale nella costruzione di von Staudt: detto armonico un gruppo di 4 punti se il loro Wurf è -1 (e analogamente per 4 elementi di una forma di  $1^a$  specie) von Staudt definiva proiettività fra due forme di  $1^a$  specie una corrispondenza biunivoca che trasforma un gruppo armonico in un gruppo armonico — il che rivelava tra l'altro che le definizioni di Steiner e Chasles contenevano più del necessario. In modo analogo erano poi introdotte le proiettività tra forme di  $2^a$  e di  $3^a$  specie.

Anche la correlazione polare fu introdotta da von Staudt senza ricorrere alla teoria delle coniche: partendo inoltre dalla osservazione che il luogo di un punto appartenente alla propria polare è una conica, egli fu condotto a definire le coniche in maniera sintetica come le curve fondamentali della polarità piana, una definizione che abbracciava anche le coniche immaginarie.

L'approccio di von Staudt consentiva una definitiva chiarificazione in termini proiettivi degli «elementi immaginari», come egli mostrò nei *Beiträge*. Così per esempio, una coppia qualunque di punti immaginari coniugati del piano è per von Staudt un'involuzione ellittica sulla punteggiata individuata dalla coppia, mentre una coppia di rette (o piani) immaginari coniugati è un'involuzione ellittica su un fascio di rette (o di piani). Per distinguere gli elementi della coppia, von Staudt associava ad un elemento un verso della forma, mentre l'altro elemento della coppia era associato al verso opposto.

În particolare poi i punti ciclici del piano erano dati dall'involuzione circolare sulla retta impropria. Nei *Beiträge* von Staudt applicava poi questi concetti alla soluzione di numerosi problemi e alla costruzione di coniche (e quadriche) reali e immaginarie sotto date condizioni.

## 5. L'indirizzo analitico: Möbius e Plücker.

Se con la sua opera originale e profonda von Staudt aveva dato compiuta realizzazione al programma steineriano di una fondazione sintetica della geometria proiettiva, pure non era animato da una concezione intransigente e settaria della geometria e negli ultimi anni di vita egli aveva cominciato a lavorare ad una «geometria della misura» con lo stesso spirito e lo stesso rigore logico con cui aveva redatto la *Geometrie der Lage*.

Parallelamente a quello sintetico infatti, anche l'indirizzo analitico in geometria

aveva conosciuto un notevole sviluppo grazie soprattutto ai lavori di alcuni geometri tedeschi, di Möbius e Plücker in primo luogo.

Anche Ferdinand Möbius (1790-1868), come von Staudt, aveva studiato a Gottinga sotto la guida di Gauss, che lo indirizzò verso ricerche di carattere astronomico. Nel 1816 fu nominato direttore dell'Osservatorio di Lipsia e nel 1844 professore di matematica alla locale università. Come il maestro, anche Möbius intrecciò ricerche di astronomia e meccanica celeste con quelle più propriamente matematiche, e geometriche in particolare.

Nel 1827 Möbius pubblicò la sua opera più celebre, *Das barycentrische Calcul* (Il calcolo baricentrico) che, come si legge nel sottotitolo, forniva un «nuovo strumento per trattare analiticamente la geometria» e consentiva di risolvere «nuove classi di problemi e di sviluppare diverse proprietà delle coniche».

L'idea fondamentale del *Calcul* di Möbius si basava sull'osservazione che «ogni sistema di punti materiali ha sempre un solo centro di gravità (baricentro), e quindi in qualunque modo si colleghino fra loro i punti, come risultato si ottiene sempre uno e uno stesso punto» (1827, iv), cioè il baricentro del sistema. Ecco allora che ad un qualunque punto P del piano si potevano attribuire come «coordinate» i valori p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>, p<sub>3</sub> che rappresentano i pesi che si dovrebbero porre nei vertici di un triangolo fissato, affinché il baricentro del sistema cada nel punto P. Analogamente si potevano assegnare coordinate ad un punto qualunque dello spazio, rispetto a un tetraedro fisso di riferimento.

Le «coordinate baricentriche» di Möbius rappresentazono il primo sistema di coordinate omogenee introdotte in geometria, cioè coordinate tali che *il loro rapporto* individua univocamente l'ente geometrico (infatti  $\lambda p_1$ ,  $\lambda p_2$ ,  $\lambda p_3$  danno lo stesso baricentro e dunque individuano nel piano lo stesso punto P di coordinate  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ).

Egli procedette poi ad una classificazione sistematica delle correlazioni (*Verwandschaften*) tra due piani (o due spazi), dalla congruenza alla similitudine, all'affinità e infine alla collineazione, che trasforma rette in rette e che Möbius considerò come il tipo più generale di correlazione. Egli affrontò poi il problema di determinare quali relazioni tra figure corrispondenti rimangano inalterate per i diversi tipi di correlazione, giungendo a individuare il ruolo fondamentale giocato nelle collineazioni dal birapporto di quattro punti. Nel II libro del *Calcul* egli studiava sistematicamente le proprietà delle collineazioni, mentre nel III esponeva la teoria delle coniche.

La grande fecondità delle idee di Möbius non fu tuttavia immediatamente apprezzata dai geometri, in parte per la loro novità, in parte anche per lo stile peculiare (e talvolta oscuro) in cui era presentato il *Calcul*. Una sorte analoga toccò al *Lehrbuch der Statik* (Trattato di statica, 1837), un trattato in due volumi in cui Möbius presentava geometricamente la statica dei corpi rigidi in termini originali rispetto agli *Eléments de statique* (1804) di Poinsot.

Nelle prime pagine del *Calcul* Möbius aveva introdotto l'idea di segmento orientato (e analogamente di area e volume orientati): detto AB il segmento che congiunge A verso B, allora AB = -BA. Egli definiva poi la somma di segmenti e il prodotto per uno scalare, di cui si serviva nella teoria del birapporto di quattro punti.

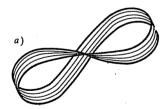
Il calcolo con segmenti orientati fu ripreso e sviluppato sia nella sua opera di meccanica celeste *Die Elemente der Mechanik des Himmels* (Elementi di meccanica celeste, 1843), sia in numerosi articoli, che finirono per intrecciarsi con le contemporanee ricerche di Grassmann e di Bellavitis.

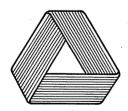
Il nome di Möbius è tuttavia rimasto legato ad una superficie unilatera, che egli studiò nell'ultimo periodo della sua vita. L'occasione per queste ricerche gli fu fornita dall'Académie des Sciences di Parigi, che mise a concorso per il Grand Prix di matematica del 1861 la questione: «Perfezionare in qualche punto importante la teoria geometrica dei poliedri». Möbius, che aveva allora 68 anni, decise di concorrere con una Mémoire sur les polyèdres che, sebbene non vincesse il premio — che peraltro non fu assegnato — contiene una quantità di idee e di risultati di grande importanza sulle proprietà topologiche delle figure. Möbius si limitò poi a pubblicare gli elementi essenziali in due brevi articoli.

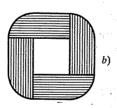
Möbius prendeva le mosse dalla nozione di «correlazione elementare» tra due figure, cioè dalla trasformazione che associa «a ogni punto dell'una un punto dell'altra, di modo che a due punti infinitamente vicini corrispondano due punti infinitamente vicini», o come si dice oggi, una trasformazione omeomorfa.

La «correlazione elementare» era lo strumento fondamentale per la classificazione delle superfici (per esempio Möbius osservava che la superficie della sfera è «correlativa» a quella di un qualunque poliedro euleriano, mentre non lo è a quella di un toro) e giungeva per questa via alla nozione di connessione delle superfici in maniera indipendente da Riemann.

Egli infine discuteva le condizioni di validità e le generalizzazioni del teorema di Euler sui poliedri: E+F=K+2, dove E è il numero dei vertici, F quello delle facce e K quello degli spigoli, ed in questo contesto considerava la possibilità di «poliedri unilateri» (fig. b) di cui l'esempio in qualche senso più semplice è il cosiddetto «nastro di Möbius». Egli studiò questa superficie (fig. a) contemporaneamente a Listing; ad entrambi il problema era stato suggerito da Gauss, la cui figura compare ad ispirare i primi passi nella moderna topologia algebrica. «Io ignoro come Gauss sia stato condotto a considerare questa superficie», annotava tuttavia Möbius nei suoi appunti verso la fine del 1858.







Accanto a Möbius, il più autorevole rappresentante dell'indirizzo analitico in geometria fu Julius Plücker (1801-1868), figura ben più influente del matematico di Lipsia, con contatti scientifici in Francia e Inghilterra. Dopo gli studi a Bonn e Parigi, Plücker fu nominato nel 1832 professore all'università di Berlino, dove le sue concezioni della geometria inasprirono i contrasti col gruppo di Steiner e Jacobi. Nel 1836 Plücker accettò la chiamata all'università di Bonn, dove si dedicò

quasi esclusivamente all'insegnamento e alla ricerca fisico-matematici, per riprendere ancora a lavorare nel campo della geometria solo dopo il 1863, anno della morte di Steiner.

Nelle sue ricerche geometriche Plücker si ispirò inizialmente alla grande tradizione di Monge: «Sono del parere — egli scriveva infatti in apertura del suo primo lavoro, gli *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (Sviluppi analiticogeometrici, 1828-1831) — che l'analisi, indipendentemente da ogni applicazione, sia una scienza autonoma e in sé compiuta, e che la geometria come d'altra parte la meccanica appaia semplicemente come un'interpretazione grafica di certe relazioni» (1828, ix).

L'opera di Plücker è così caratterizzata da una continua e feconda interazione tra equazioni e metodi analitici e concezioni geometriche, alimentata dalla sua straordinaria abilità a «leggere nelle equazioni» con occhi geometrici.

Uno splendido esempio dei metodi di Plücker è dato dalla sua dimostrazione del teorema di Pascal così riassunta da Klein (1926, 122): date le due terne di rette p, q, r e p', q', r', se sei dei loro nove punti di intersezione stanno su una conica, gli altri tre stanno su una retta. Se, adottando la «notazione abbreviata» introdotta da Plücker e diventata usuale, indichiamo con p = 0, q = 0 e così via le equazioni delle rette, allora la combinazione lineare pqr +  $\mu$ p'q'r' = 0 dà l'equazione di un fascio di curve di terz'ordine che passano per i nove punti di intersezione. Siccome sei punti stanno su una conica, si può pensare di scegliere  $\mu$  in modo tale che la cubica così ottenuta e la conica abbiano in comune un settimo punto. Ma in tal caso, l'equazione che dà le radici comuni alla cubica e alla conica è identicamente nulla, giacché due tali curve (per il teorema di Bézout) non hanno più di sei punti in comune. Allora, ciò significa che la cubica si spezza in una conica e in una retta, che deve necessariamente passare per i tre altri punti di intersezione.

L'uso del coefficiente indeterminato (la « $\mu$  di Plücker», come la chiamò Klein) sistematicamente adottato dal geometra tedesco, è diventato oggi del tutto naturale nella soluzione dei problemi geometrici. A lui si deve inoltre il ricorso sistematico alle coordinate omogenee, che nelle sue mani diventarono lo strumento decisivo per far luce sulla teoria della dualità polo-polare.

L'uso di coordinate omogenee evidenziava un'altra idea fondamentale di Plücker: scritta l'equazione di una generica retta del piano come  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ , la completa simmetria esistente tra le u e le x suggerì a Plücker di considerare le u come variabili e le x come coefficienti. Allora l'equazione data rappresenta il fascio di rette passanti per il punto  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  cioè in altre parole, l'equazione del punto in *coordinate di retta*  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ . Del tutto analoga era l'introduzione di coordinate di piano nello spazio. L'assunzione di un arbitrario *Raumelement* (elemento dello spazio - punto, retta o piano) come elemento fondamentale da cui partire nelle considerazioni geometriche chiariva la natura del «principio di dualità» su cui a lungo avevano polemizzato Poncelet e Gergonne: siccome nelle equazioni di punto e retta (nel piano) e di punto e piano (nello spazio) le coordinate u e x compaiono in maniera simmetrica, nei teoremi in cui erano semplicemente coinvolte coppie di questi enti, si potevano scambiare i termini che li designavano.

Accanto a questi, che oggi sono diventati elementi fondamentali nei primi passi

dello studio della geometria, Plücker nella sua Theorie der algebraischen Kurven der Ebene (Teoria delle curve algebriche piane, 1839) pubblicava una serie di notevoli risultati sulle curve algebriche e le loro singolarità, ivi comprese le fondamentali «formule di Plücker» che stabiliscono una relazione algebrica tra ordine di una curva (in coordinate puntuali), classe della curva (in coordinate di retta) e singolarità semplici. Egli infine dava una presentazione sistematica delle proprie vedute geometriche nel volume Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der gerade Linie als Raumelement (Nuova geometria dello spazio, fondata sulla considerazione della retta come elemento, 1868), la cui II parte fu pubblicata postuma (1869) da Klein, suo assistente a Bonn. L'opera di Plücker ha avuto un'importanza fondamentale per lo sviluppo della geometria proiettiva, anche se. come ebbe a scrivere lo stesso Klein, «Plücker non fu un geometra projettivo nel senso stretto del termine» e dedicò molte delle sue ricerche allo studio accurato del comportamento di una curva all'infinito, all'esistenza di asintoti ecc., tutte cose che non hanno molto senso dal punto di vista proiettivo. «L'elaborazione coerente del pensiero proiettivo — concludeva Klein (1926, 126) — e con ciò il perfezionamento della teoria degli invarianti toccò ad una generazione successiva».

#### BIBLIOGRAFIA

#### Testi

M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Brussels, Hayez, 1837 (2<sup>a</sup> ed. Paris, Gauthier-Villars, 1875).

A.F. Möbius, Gesammelte Werke, Leipzig, Hirzel, 1885-1887, 4 voll.

In., Der barycentrische Calcul, Leipzig, Verlag von J.A. Barth, 1827 (reprint in Gesammelte Werke, cit., vol. I, pp. 1-388; reprint Hildesheim, Georg Olms, 1968).

J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Essen, 1828-1831, 2 voll. J.V. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paris, Bachelier, 1822.

K.G.C. von Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg, Bauer-Raspe, 1847 (trad. it.: Geometria di posizione, a cura di M. Pieri, Torino, Bocca, 1889).

J. Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, Berlin, Duncher-Humblot, 1832 (reprint Ostwald's Klassiker n° 82, 83, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1896).

### Studi

M.J. CROWE, A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system, Notre Dame, University of Notre Dame Press, 1967 (reprint New York, Dover, 1985).

G. Fano, Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX Jahrhundert, in Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. 3 AB 4a, 1907, pp. 221-388.

L. Kollros, Jakob Steiner, in «Elemente der Mathematik», Beiheft 7, Basel, 1947.

E. Kötter, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf von Staudt, in «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung», vol. V, 1901, pp. 1-486.

G. LORIA, Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce, Genova, Atti dell'Università di Genova, 1892.

J.C. Pont, La topologie algébrique des origines à Poincaré, Paris, Presses Universitaires de France, 1974.

# XI. Teoria dell'estensione, invarianti e gruppi di trasformazioni

La geometria non è altro che lo studio di un gruppo.

POINCARI

1. L'Ausdehnungslehre di Grassmann. - 2. Le trasformazioni birazionali. - 3. Gli invarianti. - 4. Il «programma di Erlangen». - 5. Gruppi di trasformazioni.

# 1. L'Ausdehnungslehre di Grassmann.

Nel volume *System der Geometrie des Raumes* (Sistema della geometria dello spazio, 1846) Plücker aveva mostrato come si potesse concepire in maniera formale lo spazio quadridimensionale. Egli considerava infatti la retta, data dalle due equazioni x = az + b, y = cz + d, come elemento costitutivo dello spazio ordinario. Essendo una retta individuata dai quattro parametri a, b, c, d si può dire allora che lo spazio ha 4 dimensioni, se lo si pensa costituito da rette. Era questo il significato che Plücker attribuiva al termine «spazio n-dimensionale», che comportava la costruzione dell'ordinaria geometria dello spazio a partire da elementi costitutivi dipendenti da n parametri. Il resto era per Plücker della «metafisica».

Una concezione completamente originale della geometria n-dimensionale, robustamente sostanziata di «metafisica», era in quegli stessi anni elaborata da uno sconosciuto professore del ginnasio di Stettino, Hermann Grassmann (1809-1877), uno dei più profondi matematici del secolo scorso.

Grassmann ricevette i primi elementi della propria educazione dal padre Justus, teologo e anch'egli professore di matematica e fisica al ginnasio di Stettino. Grassmann studiò a Berlino filologia e teologia per tre anni, prima di tornare a Stettino dove proseguì i propri studi filosofici e fisico-matematici, questi ultimi su testi del padre come la *Raumlehre* (Dottrina dello spazio) in due volumi (1817 e 1824) e la *Trigonometrie* (Trigonometria, 1835), di carattere elementare ma scritti in uno stile filosofico che esercitò una visibile influenza anche sui futuri lavori di Hermann.

Per un anno Grassmann insegnò a Berlino sul posto lasciato vacante da Steiner alla Scuola tecnica, ma nel 1836 ritornò a Stettino, dove trascorse il resto della vita come semplice insegnante, non riuscendo mai ad ottenere un posto di professore all'università. Grassmann fu un uomo di una versatilità straordinaria, e i suoi contributi alla matematica si affiancano ai suoi lavori di cristallografia, teoria dei colori e delle correnti elettriche. A lui si deve un vocabolario di sanscrito sul Rigveda che è ancora oggi usato, una raccolta di canti popolari tedeschi e ricerche linguistico-filologiche sui nomi delle piante, studi sulla musica vocale e così via. Grassmann prese inoltre parte attiva alle vicende politiche e culturali del suo tempo, intervenendo nelle questioni sociali e religiose, lavorando per molti anni nella redazione di un giornale a Stettino, ed essendo inoltre maestro di una loggia massonica.

Per migliorare la sua condizione di insegnante e provare la sua competenza in matematica Grassmann presentò ad una apposita commissione scientifica di Berlino una memoria, *Theorie der Ebbe und Flut* (Teoria delle maree, 1840) sulla teoria dei flussi e riflussi e delle maree in cui forniva una prima presentazione di una sua «nuova analisi». La lunga e difficile memoria di Grassmann non fu adeguatamente apprezzata dai commissari e rinviata all'autore. Qualche anno più tardi Grassmann pubblicava nel volume *Die lineale Ausdehnungslehre* (Teoria lineare dell'estensione, 1844) l'esposizione sistematica della teoria che era venuto elaborando in occasione delle ricerche sulle maree. Agli occhi di Grassmann si trattava di «un nuovo ramo della matematica» che egli presentava insieme alle «sue applicazioni agli altri rami della matematica e inoltre alla statica, alla meccanica, alla teoria del magnetismo e alla cristallografia».

Nella prefazione scriveva che la prima idea per la sua teoria dell'estensione (Ausdehnungslehre) gli era venuta «dalla considerazione dei negativi in geometria», cioè dal «concepire le distanze AB e BA come grandezze opposte» (1844, 7). Da qui aveva tratto la conclusione che se A, B, C sono punti di una retta, allora si ha sempre AB + BC = AC qualunque sia il segno di AB e BC. Uguaglianza che rimane vera se si pensa alla somma di segmenti orientati (vettori, come si dice oggi), anche se A, B, C non sono allineati.

Egli discuteva poi le concezioni filosofiche che lo avevano guidato nella sua ricerca, ispirate sostanzialmente dalla *Dialektik* (Dialettica) di Schleiermacher, un autore al quale lo stesso Grassmann riconosceva di « dovere infinitamente sul piano intellettuale ».

«La principale divisione tra le scienze — affermava Grassmann in apertura dell'introduzione all'Ausdehnungslehre — è tra [scienze] reali e formali, dove le prime rappresentano nel pensiero l'esistente considerato come indipendente e contrapposto al pensiero e hanno le loro verità nella corrispondenza del pensiero con quell'esistente. Le scienze formali d'altra parte hanno il loro oggetto dato dal pensiero stesso e le loro verità nella corrispondenza dei processi di ragionamento tra loro» (Ibid., 22). Tali scienze possono riguardare i principi generali del pensiero oppure il particolare che è dato dal pensiero. La prima, dice Grassmann, è la dialettica (logica) mentre la seconda è la matematica pura. «La matematica pura è dunque la scienza del particolare, esistente come qualcosa che è chiamato in essere dal pensiero» (Ibid.). In questo senso tale particolare si può chiamare una «forma-pensiero» o semplicemente una forma, egli aggiunge. «Quindi la matematica è la teoria delle forme (Formenlehre)».

Un oggetto di pensiero può essere posto in essere attraverso un semplice atto generativo o con un doppio atto del *porre* e del *connettere*. Nel primo caso si ha una forma continua, nel secondo una «discreta». L'opposizione tra reale e formale gioca un ruolo fondamentale nell'*Ausdehnungslehre*, così come quelle tra discreto e continuo e tra uguale e disuguale, la cui interazione con i modi fondamentali di generazione delle forme dà luogo alla suddivisione grassmanniana in quattro specie di forme (e di conseguenti teorie). Le forme discrete (numero e combinazione) costituiscono l'oggetto delle scienze del discreto (teoria dei numeri e analisi combinatorica), mentre le scienze del continuo concernono le «grandezze

intensive» (le forme algebricamente continue) e le «grandezze estensive» (le forme combinatorialmente continue). Le grandezze intensive costituiscono così il fondamento della teoria delle funzioni e del calcolo differenziale e integrale, mentre quelle «estensive» sono il fondamento della teoria dell'estensione.

Tra le scienze delle forme non figura la geometria, affermava Grassmann, dal momento che essa così come la meccanica ha per oggetto un reale esistente. «Per la geometria questo è lo spazio. Tutto ciò è chiaro dal momento che il concetto di spazio non può in nessun modo essere prodotto dal pensiero, ma piuttosto si presenta come qualcosa di dato» (*Ibid.*, 23). L'Ausdehnungslehre era da Grassmann concepita come un sistema generale e astratto, prioritario e indipendente dalla geometria: «la teoria dello spazio può al più servire come un esempio» per illustrarne i concetti, che hanno la loro origine profonda nella dialettica tra i modi di generazione delle forme e le opposizioni fondamentali degli oggetti di pensiero.

Non stupisce che un tale approccio fosse sconcertante per i lettori contemporanei. Lo stesso Möbius confessò di non essere andato oltre le prime due pagine, mentre Hamilton nelle sue lettere a De Morgan lamentava la difficoltà a penetrare oltre la veste filosofica con cui Grassmann rivestiva le sue idee per coglierne il nocciolo matematico.

Dal punto di vista moderno si può dire che questo è in gran parte costituito dall'algebra lineare e multilineare, che Grassmann elaborò nel contesto di una teoria formale, ricca di spunti e di suggestioni che è impossibile riassumere in qualche pagina. L'originalità di contenuti e la profondità delle idee fanno dell'*Ausdehnungslehre* un classico della matematica, la cui influenza duratura sul pensiero matematico si è rivelata appieno solo nel nostro secolo.

Tra i principali concetti introdotti da Grassmann, figurava quello di spazio vettoriale. Grassmann prendeva le mosse dalla considerazione di una collezione di «unità»  $e_1$ , ...,  $e_n$  per costruire lo spazio lineare da esse generato mediante combinazioni lineari  $a_1e_1+...+a_ne_n$  dove gli  $a_i$  sono numeri reali. Egli sviluppava poi i concetti di indipendenza lineare di vettori, sottospazio di uno spazio, dimensione di uno spazio, unione e intersezione di sottospazi, ottenendo tra l'altro l'importante identità

$$\dim(U \cup W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Grassmann dimostrava inoltre le formule di cambiamento di coordinate per un cambiamento di base dello spazio. Particolare attenzione era poi dedicata alla definizione dei vari tipi di prodotto, tra cui particolare interesse avevano i prodotti «lineari» per cui si ha: 1)  $e_ie_j = e_je_i$  oppure 2)  $e_ie_j = -e_je_i$  (e dunque  $e_i^2 = 0$ ) per ogni i, j. Grassmann illustrava il 2° concetto di prodotto applicandolo a questioni di meccanica e alla risoluzione di un sistema lineare di n equazioni in n incognite.

Le considerazioni formali erano continuamente intrecciate con le interpretazioni geometriche, che tra l'altro consentivano di intravedere come egli fosse pervenuto al proprio sistema. Così, ampio spazio era dedicato alla moltiplicazione di punti, introdotta in una maniera puramente astratta, e alle applicazioni alla geometria e alla statica.

In una successiva sezione definiva il concetto di prodotto «regressivo» di grandezze e ne mostrava l'uso sia in geometria che in cristallografia.

Il volume di Grassmann non ebbe praticamente alcuna influenza immediata e altrettanto inosservata passò l'autorecensione che il geometra di Stettino scrisse nel 1845 su consiglio di Möbius per spiegare il contenuto essenziale dell'Ausdehnungs-lehre. Ancora Möbius segnalò all'amico che la Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften metteva a concorso un premio per la realizzazione del sistema di geometria dell'estensione (analysis situs) vagheggiato da Leibniz. Grassmann redasse per l'occasione la Geometrische Analyse (Analisi geometrica, 1847) che vinse il premio e pubblicò la memoria con un'appendice di Möbius. Grassmann si basava ancora sul proprio lavoro del 1844, aggiungendovi una trattazione dettagliata del prodotto vettoriale, ma anche stavolta il risultato non fu diverso da parte della comunità matematica.

Ad un sistema in parte analogo di calcolo vettoriale era nel frattempo giunto anche Adhémar Barré, conte di Saint-Venant (1797-1886), un ingegnere francese che vi era stato condotto partendo da ricerche sull'elasticità. Anche Cauchy, ispirandosi alla memoria di Saint-Venant Sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la mécanique (1845), aveva sviluppato un proprio calcolo sulle « chiavi algebriche » (1853) che sostanzialmente si riduceva ad un metodo per la risoluzione dei sistemi lineari. Grassmann cercò invano di rivendicare la priorità presso l'Académie des Sciences (la commissione chiamata a decidere, di cui faceva parte anche Cauchy (!), non concluse mai i lavori). Egli ripubblicò inoltre nel «Journal» di Crelle una esposizione concisa ed essenziale del proprio metodo, in cui presentava non meno di 16 modi diversi di definire il prodotto di numeri a più unità.

Nella stessa rivista Grassmann aveva pubblicato, dopo il 1844, una quindicina di articoli, tutti riferiti in un modo o nell'altro all'Ausdehnungslehre. Egli vi mostrava applicazioni alla meccanica e soprattutto alla geometria. Uno di questi attirò l'attenzione di Giusto Bellavitis (1803-1880), un autodidatta che per i suoi originali lavori geometrici era stato chiamato ad insegnare all'università di Padova. A partire dal 1832, ispirandosi alla Géométrie de position di Carnot e coll'intento di bandire gli immaginari dalla geometria, Bellavitis aveva sviluppato una propria «teoria delle equipollenze» che si basava sulle stesse idee del calcolo con segmenti che abbiamo visto in Möbius. Bellavitis aveva contestato la generalità delle «costruzioni lineari» di Grassmann, cioè delle generazioni di curve algebriche mediante «prodotti planimetrici», con cui egli aveva per esempio mostrato con una grande semplicità che una cubica si poteva generare mediante il movimento di rette nel piano ruotanti attorno ad un punto fisso. Un breve scambio epistolare col geometra di Stettino era sufficiente a convincere Bellavitis della validità delle tecniche grassmanniane, che saranno riprese in Italia anche da Cremona (v. oltre) per risolvere problemi di determinazioni di curve algebriche sotto date condizioni.

Nel tentativo di presentare le idee dell'Ausdehnungslehre in una forma più vicina alla sensibilità dei matematici, Grassmann ne pubblicò nel 1862 una versione «euclidea», sfrondata da ogni riferimento filosofico ma l'esito non fu diverso. Solo verso la fine degli anni '60 le idee di Grassmann cominciarono

lentamente ad affermarsi, insieme al contemporaneo diffondersi dei metodi algebrici (matrici, determinanti e «iperdeterminanti» etc.). e al successo della teoria dei quaternioni in Gran Bretagna.

## 2. Le trasformazioni birazionali.

Risolvendo due problemi posti dai «Nouvelles Annales de Mathématiques» nel 1860, Luigi Cremona (1830-1903) faceva notare che in realtà le due questioni non erano altro che l'enunciato di un teorema dimostrato da «un eminente geometra tedesco, Hermann Grassmann». In questa occasione Cremona menzionava «l'opera interessante» (l'Ausdehnungslehre) di Grassmann e i diversi articoli da lui pubblicati nel «Journal» di Crelle, visto che «eccetto Möbius e Bellavitis, non mi pare che nessun geometra abbia dedicato alle ricerche di Grassmann l'attenzione che esse meritano». A questo punto Cremona mostrava come risolvere i due problemi col metodo «assai veloce e curioso» dei prodotti planimetrici grassmanniani.

Luigi Cremona si era laureato a Pavia nel 1853, allievo di Bordoni, e dopo qualche anno di insegnamento nei licei fu nominato nel 1860, al momento dell'Unità, professore di geometria superiore all'università di Bologna. Nella *Prolusione* al suo primo corso, fortemente ispirata da motivi risorgimentali — lo stesso Cremona diciottenne aveva partecipato nel 1848 alla difesa di Venezia — il giovane geometra sottolineava con forza l'importanza di insegnare anche nelle università italiane la «moderna geometria» proiettiva, coltivata con successo negli altri stati europei. In quell'occasione Cremona delineava un programma di ricerca che egli stesso si accingeva con entusiasmo a realizzare, e che segnò la rinascita degli studi geometrici in Italia.

Nella *Prolusione* esponeva in maniera magistrale i principi fondamentali della geometria proiettiva, dai concetti di polo-polare a quelli di ordine e classe di una curva, al principio di dualità, facendo proprio nella sostanza il punto di vista di Chasles sull'importanza di coniugare «le relazioni metriche delle figure» con le loro proprietà proiettive. Come ebbe a scrivere egli stesso, fu l'«analisi che prima mi aveva dato le armi necessarie per penetrare nei misteri della sintesi geometrica». La convinzione profonda del «reciproco aiuto che si rendono in geometria l'analisi e la sintesi» fu un elemento caratteristico nella ricerca geometrica di Cremona, che si collocò in una posizione originale nella polemica fra «scuole» che allora divideva i geometri.

A questa concezione si ispira l'ampia memoria Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane (1861), in cui, come osservò M. Noether (1904, 7) il geometra italiano «con i suoi metodi e con le sue concezioni aveva ristabilito i rapporti tra la geometria pura e l'intero sviluppo analitico-geometrico che si era affermato con Plücker, Hesse e Clebsch, con Salmon e Cayley». Cremona vi raccoglieva idee e questioni già presenti in qualche modo ai geometri europei, dandone una trattazione sistematica «con metodo geometrico semplice e uniforme» e aggiungendovi propri contributi originali. Ad essa si affiancavano i Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie (1867), testimonianza dell'im-

pegno profuso da Cremona nel diffondere anche in Italia i più recenti risultati della ricerca geometrica europea.

Come l'Introduzione, anche i Preliminari furono tradotti in tedesco, arricchiti da una Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre con cui Cremona aveva vinto il premio Steiner (1866) per la geometria, bandito dall'Accademia delle Scienze di Berlino. L'edizione tedesca dei Preliminari costituì per diverso tempo l'esposizione più completa della teoria geometrica delle superfici algebriche.

Il periodo trascorso a Bologna rappresentò la stagione più feconda della ricerca scientifica di Cremona. Egli allora pubblicò inoltre due importantissime memorie, apparse nel 1863 e 1865, con lo stesso titolo: *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, in cui gettava le basi della teoria delle trasformazioni birazionali, oggi dette «cremoniane» in suo onore.

Prendendo le mosse da due lavori di L. Magnus (1790-1861) e G. Schiaparelli (1835-1910) nella sua prima memoria Cremona si proponeva «di mostrare direttamente la possibilità di trasformazioni geometriche di figure piane, nelle quali le rette abbiano per corrispondenti delle curve di un dato ordine qualsivoglia» (*Ibid.*). Allo scopo egli stabiliva innanzitutto le due equazioni fra i numeri dei punti semplici e multipli comuni a tutte le curve corrispondenti a rette, poi dimostrava «come, per mezzo di raggi appoggiati a due linee direttrici, si possano projettare i punti di un piano sopra un secondo piano e così trasformare una figura data in quello, in un'altra figura situata in questo» (*Ibid.*). Nella memoria del 1865 egli osservava che quelle due equazioni «ammettevano in generale più soluzioni», ognuna delle quali «offre una speciale maniera di trasformazione», che egli analizzava servendosi delle proprietà della «curva jacobiana», cioè il lungo dei punti doppi delle curve di una figura che corrispondono nella trasformazione alle rette dell'altra.

Uno dei temi ricorrenti nelle ricerche di Cremona fu lo studio delle «cubiche gobbe», com'egli propose di chiamare le linee del terz'ordine a doppia curvatura, di cui dimostrò numerosissime proprietà, in parte enunciate senza dimostrazione da Chasles.

Dal 1866 al 1872 Cremona insegnò a Milano all'Istituto Tecnico Superiore (l'odierno Politecnico) fondato da Brioschi nel 1863, poi dal 1873 si trasferì a Roma, dove riorganizzò e diresse la Scuola di Ingegneria per oltre vent'anni.

Cremona impegnò molte delle sue energie nei problemi dell'insegnamento, sia medio sia universitario, che egli considerò un elemento cruciale nella formazione del nuovo Stato unitario. Con Betti e Brioschi, nel Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione Cremona condusse un'appassionata battaglia per il rinnovamento dell'istruzione, introducendo l'insegnamento della geometria proiettiva negli istituti tecnici (oltre che al primo anno di università). Anche la riforma dell'insegnamento medio, con l'adozione degli *Elementi* di Euclide, significò un taglio netto con una lunga tradizione di testi mediocri. L'impegno culturale e civile di Cremona divenne prevalente dopo il 1879, quando abbandonò la ricerca attiva per dedicarsi alla vita politica. Egli tuttavia continuò ad esercitare un'influenza decisiva coll'insegnamento, che mantenne sempre ad altissimo livello. Alla sua

«scuola» si formò così la prima generazione dei geometri italiani, da Eugenio Bertini (1846-1933) a Giuseppe Veronese (1854-1917) i cui lavori, unitamente al contemporaneo affermarsi delle idee di Riemann, diedero un grande impulso allo sviluppo della geometria in Italia verso la fine del secolo scorso, prima nell'indirizzo proiettivo poi in quello algebrico.

Le ricerche geometriche di Cremona si legavano intimamente con i contemporanei sviluppi della teoria riemanniana delle funzioni abeliane. Il giovane e brillante allievo di Riemann, Gustav Roch (1839-1866), aveva precisato il numero delle costanti da cui dipendono le funzioni meromorfe su una superficie di Riemann che assumono poli assegnati in numero finito («teorema di Riemann-Roch»). A questo primo fecero seguito numerosi ed importanti contributi di geometri tedeschi. Alfred Clebsch, che si era inizialmente rivolto a studi di meccanica teorica e fisica matematica, dopo l'incontro con Paul Gordan (1837-1912) si dedicò essenzialmente alla teoria delle curve e degli invarianti algebrici e birazionali.

Egli rielaborò da un punto di vista geometrico l'intera teoria riemanniana, riottenendo il teorema di Abel in termini di curve, e classificò le curve secondo il genere. Jacob Lüroth (1844-1910) dimostrò che una curva di genere 0 è birazionalmente equivalente a una retta, mentre Clebsch provò che una curva di genere 1 è birazionalmente trasformabile in una cubica.

Clebsch affrontò inoltre il problema dell'uniformizzazione per le curve: data una curva f(x,y) = 0 di genere p, è possibile esprimere le coordinate di un punto generico x, y della curva mediante funzioni univoche (o «uniformi») di uno (o più) parametri?

Clebsch mostrò che una curva di genere 0 può essere uniformizzata da funzioni razionali di un solo parametro (curva «unicursale»), mentre per una curva di genere 1 (curva «bicursale», secondo Clebsch) x e y possono essere uniformizzate mediante funzioni razionali di due parametri u, v dove v² è un polinomio di 3° o 4° grado in u — cioè mediante funzioni ellittiche di un parametro. Per curve di genere 2 Alexander von Brill (1842-1935) dimostrò che servivano allo scopo funzioni iperellittiche (dove cioè v² è un polinomio di 5° o 6° grado in u), mentre per generi superiori il problema dell'uniformizzazione comportava l'utilizzo delle più generali funzioni automorfe.

La prima enunciazione di un teorema generale di uniformizzazione fu data da Klein nel 1882. Le sue ricerche si intrecciarono allora con quelle di Poincaré, come appare dalla vivace corrispondenza che testimonia la serrata competizione scientifica allora sorta tra i due.

Il problema dell'uniformizzazione tuttavia trovò soluzione rigorosa solo molto più tardi, per opera dello stesso Poincaré e di Paul Koebe (1882-1945). Essi pubblicarono nel 1907 due dimostrazioni indipendenti del teorema che si può enunciare in termini moderni dicendo che ogni superficie di Riemann semplicemente connessa si può porre in corrispondenza biunivoca e biolomorfa o col piano complesso C, o con la sfera di Riemann C∪∞ o col disco di centro nell'origine e raggio unitario.

L'approccio geometrico alla teoria riemanniana delle funzioni abeliane, frutto delle ricerche congiunte di Clebsch e di Gordan, trovò espressione nel loro volume Theorie der Abelschen Funktionen (Teoria delle funzioni abeliane, 1866) e si affiancò all'impostazione analitica della stessa teoria sviluppata da Weierstrass nelle sue lezioni all'università. Il volume di Clebsch e Gordan lasciava tuttavia aperte numerose questioni, come per esempio quelle sui punti doppi e le singolarità di una curva algebrica. Esso costituì il punto di partenza di una fiorente «scuola» di geometria, che coniugò i metodi e le tecniche della geometria proiettiva con le idee di Riemann ed ebbe come protagonisti in Germania Brill e Max Noether (1844-1921), Corrado Segre (1863-1924) e Bertini in Italia, Cayley in Inghilterra e Georges Halphen (1844-1889) in Francia.

L'attenzione dei geometri si orientò verso lo studio delle singolarità di una curva e il problema dello «scioglimento delle singolarità». Nel 1871 Max Noether dimostrò che una curva algebrica piana irriducibile può essere trasformata con una trasformazione «cremoniana» in una che non ha singolarità eccetto punti multipli a tangenti distinte. Allo scopo egli si servì di un metodo che fu in seguito generalizzato a varietà di dimensione maggiore e che consisteva nella reiterata applicazione di opportune trasformazioni «quadratiche».

Un secondo teorema stabiliva che era possibile, mediante una trasformazione birazionale sui punti della curva, trasformare ogni curva algebrica piana irriducibile in una avente come singolarità solo punti doppi a tangenti distinte. Questo teorema, che era stato verbalmente comunicato da Kronecker a Riemann e Weierstrass nel 1858, fu dimostrato da Noether e poi da Halphen nel 1884 e ancora da altri, giacché tali «dimostrazioni» lasciavano sempre qualcosa a desiderare.

Un contributo decisivo alla geometria delle curve algebriche fu dato nel 1874 da Brill e Noether con l'articolo Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie (Sulle funzioni algebriche e la loro applicazione in geometria, 1874). Essi vi introducevano il fondamentale concetto di serie lineare, centrale nei successivi sviluppi della geometria algebrica: data una curva C di equazione f(x,y) = 0 essi consideravano i punti (x,y) della curva per i quali certe funzioni razionali sulla curva assumessero determinati valori. In altri termini, consideravano l'intersezione della curva C con una famiglia lineare di curve algebriche:

$$f(x,y) = 0$$
 ,  $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j(x,y) = 0$ .

La teoria delle serie lineari costituì uno degli strumenti più fecondi per lo studio delle proprietà delle curve algebriche introdotti da Brill e Noether. «Dal loro punto di vista — ha osservato Dieudonné (1974, I, 79) — questo modo di affrontare la teoria aveva il vantaggio di restare nel quadro della geometria proiettiva (naturalmente dovevano mostrare l'invarianza birazionale della nozione di serie lineare); inoltre potevano generalizzare la nozione di serie lineare a delle curve piane aventi dei punti singolari».

La teoria di Brill e Noether delle serie lineari si basava sul fondamentale «teorema del resto» (*Restsatz*), che nelle loro mani assunse lo stesso ruolo del teorema di Abel, consentendo di dimostrare tra l'altro il teorema di Riemann-

Roch. Essi estesero inoltre il loro metodo alle curve immerse in uno spazio  $P_N(C)$ , spazio proiettivo a N dimensioni sul campo complesso. «Una delle conseguenze più interessanti della teoria delle serie lineari — ha osservato ancora Dieudonné (*Ibid.*) — è quella di fornire una maniera sistematica per definire, inversamente, una trasformazione birazionale di una curva algebrica piana C in una curva algebrica contenuta in uno spazio proiettivo  $P_N(C)$ ».

La naturale generalizzazione di queste ricerche (che comportava tuttavia ben maggiori difficoltà) era l'estensione allo studio delle superfici algebriche, inizialmente intrapreso da Clebsch ma effettivamente affrontato solo negli ultimi due decenni del secolo.

Anche in questo caso, come per le curve, un ruolo di primo piano svolgeva la ricerca di «invarianti birazionali», che si collocava in linea di principio all'interno dell'ampia e ormai consolidata teoria degli invarianti.

## 3. Gli invarianti.

Le proprietà proiettive delle figure restano invarianti per trasformazioni lineari o, in altri termini, le trasformazioni proiettive di una figura per mezzo di trasformazioni lineari delle coordinate preservano proprietà delle figure che sono rappresentate da invarianti algebrici. Analogamente, se si considerano trasformazioni birazionali, cioè trasformazioni espresse algebricamente da funzioni razionali delle coordinate tali che la trasformazione inversa è ancora una funzione razionale delle coordinate, gli invarianti birazionali rappresentano proprietà geometriche che vengono preservate dalle omonime trasformazioni. In ciò risiede la motivazione fondamentale dello sviluppo della teoria degli invarianti, che verso la metà del secolo scorso rappresentò uno dei rami più fiorenti della matematica e costituì la «moderna algebra» del tempo. «Come tutte le strade portano a Roma — affermava nel 1864 J.J. Sylvester — così io trovo che, nel mio caso almeno, tutte le ricerche algebriche prima o poi finiscono in quel capitolo dell'algebra moderna sul cui ingresso risplende la scritta: Teoria degli Invarianti».

Tale teoria aveva avuto origine nelle ricerche di teoria dei numeri ma si era rivelata, nelle mani di Gauss, di grande importanza anche nello studio delle forme quadratiche. In generale, per una forma binaria f (x,y) (un polinomio omogeneo di grado n in due variabili) un invariante per una trasformazione lineare delle variabili:

$$x = \alpha X + \beta Y$$
 ,  $y = \gamma X + \delta Y$ 

con  $\alpha\delta-\beta\gamma=d\neq 0$  è una qualunque funzione I dei coefficienti a<sub>i</sub> di f(x,y) tale che:

$$I(A_0, A_1, ..., A_n) = d^k I(a_0, a_1, ..., a_n),$$

dove  $A_i$  sono i coefficienti della forma trasformata. Se k=0, l'invariante si chiama assoluto.

In maniera analoga si poteva definire il concetto di invariante per forme in tre o più variabili, quello di invariante simultaneo di due o più forme e quello di covariante di una forma (o di un sistema di forme), dato da una qualunque espressione dei coefficienti *e delle variabili* della forma, invariante per la trasformazione considerata.

Così il determinante jacobiano di due forme quadratiche binarie f(x,y) e g(x,y) ad esempio, dato da

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

è un covariante simultaneo delle due forme, come anche il determinante hessiano

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Ludwig Hesse fu, con Siegfried Aronhold (1819-1884), uno dei più brillanti rappresentanti di quella «scuola di Königsberg» raccolta intorno a Jacobi che segnò l'inizio della ripresa della matematica tedesca nell'Ottocento. Ispirandosi ai lavori sui determinanti di Jacobi, Aronhold e Hesse ne sottolinearono in particolare le importanti implicazioni dal punto di vista geometrico.

La teoria dei determinanti trovò una prima esposizione sistematica nel volume Teorica dei determinanti (1854) di Brioschi, col quale il giovane matematico italiano si segnalò negli ambienti europei. Il volume, ulteriormente arricchito di memorie originali, fu infatti tradotto in francese e tedesco e rappresentò a lungo un testo di riferimento nell'insegnamento universitario. Alla teoria delle forme binarie, uno dei temi preferiti delle ricerche di Brioschi, il matematico pavese dedicò un'ampia monografia apparsa nei fascicoli dei nuovi «Annali di matematica pura e applicata», prima di essere raccolta in un volume (Teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni, 1861) che contribuì in maniera decisiva a rendere familiari al pubblico matematico italiano i risultati trovati dagli algebristi inglesi. Fu in Inghilterra infatti che la teoria degli invarianti trovò i più entusiasti cultori, a partire dai pionieristici lavori di Boole. Furono Cayley, Sylvester e Salmon, «la triade degli invarianti» come li definì Hermite, a costituire in una teoria organica i numerosi risultati già noti e ad arricchirla di nuovi e fondamentali, a creare una terminologia propria e a mostrarne le innumerevoli applicazioni.

Arthur Cayley (1821-1895) fu uno dei matematici più fecondi della storia, la cui produzione assomma a circa un migliaio di memorie — tra cui un *Treatise on elliptic functions* tradotto in italiano da Brioschi nel 1884. Dopo gli studi a Cambridge, Cayley esercitò a Londra la professione di avvocato e solo nel 1863 ottenne la cattedra di professore Sadleriano di matematica (allora istituita), che ricoprì per oltre trent'anni.

Ancora studente Cayley si segnalò nel 1841 per un articolo sui determinanti, cui fecero seguito lavori sulla geometria n-dimensionale nel 1843. I primi articoli di Boole sugli invarianti ispirarono a Cayley le ricerche sugli «iperdeterminanti», come egli inizialmente chiamò gli invarianti delle forme algebriche (*quantics*, nella sua terminologia) e in un articolo del 1846 sulla teoria delle trasformazioni lineari enunciò l'obiettivo programmatico di determinare con un metodo uniforme tutti gli invarianti associati a una data forma.

Verso il 1850 Cayley fece la conoscenza di James J. Sylvester (1814-1897), a quell'epoca impiegato presso una compagnia di assicurazioni a Londra. Dopo aver studiato per un semestre all'University College di Londra, allievo di De Morgan, Sylvester si era trasferito a Cambridge, dove tuttavia non poté ottenere i gradi accademici per motivi religiosi (gradi che gli furono poi conferiti *honoris causa* nel 1871, quando fu abolita la clausola dei «39 articoli della fede anglicana», che Sylvester in quanto ebreo si era rifiutato di sottoscrivere).

Anche la carriera accademica di Sylvester fu piuttosto singolare. Dopo un breve periodo di insegnamento negli Stati Uniti all'università della Virginia nel 1841, ritornò a Londra e solo nel 1855 ottenne un posto all'Accademia Militare di Woolwich. Mandato in pensione nel 1869, Sylvester fu poi chiamato nel 1876 ad insegnare alla Johns Hopkins University di Baltimora, allora istituita, dove restò fino al 1883. Questo secondo periodo americano fu forse il più felice nella vita del matematico inglese che, come egli stesso disse una volta, fu sempre costretto a «combattere il mondo». Negli Stati Uniti Sylvester riunì alla Johns Hopkins un gruppo di studenti che indirizzò verso le ricerche algebriche e fondò l'«American Journal of Mathematics», una rivista che diede un notevole impulso alla formazione di una «scuola» di matematica americana.

Alla morte di Henry Smith (1826-1883), il matematico irlandese che si era segnalato per i suoi lavori in teoria dei numeri e algebra, Sylvester fu chiamato a succedergli a Oxford. Il sodalizio scientifico con l'amico Cayley era così nuovamente ristabilito.

Sylvester amava talvolta definirsi come una sorta di nuovo Adamo, che dava il nome agli oggetti creati nella teoria degli invarianti così come quello aveva fatto con gli animali e le piante che incontrava nel Paradiso terrestre. Lo stesso termine «invariante» si deve a Sylvester, come pure «covariante», «controvariante», «cogrediente» e «controgrediente», «eliminante», «risultante» e molti altri ancora, oggi non più in uso.

Oltre ad una quantità di risultati particolari sugli invarianti e sulla partizione dei numeri (espressione di un dato numero come somma di due o più quadrati, cubi ecc.) a Sylvester si deve la teoria dei divisori elementari di un determinante, cui fu condotto nel 1851 dallo studio delle intersezioni di curve e superfici del 2° ordine, e la teoria delle «forme canoniche» — cioè della riduzione di una data forma algebrica ad una «forma normale», come è  $x^2 + y^2$  per la forma  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ .

I lavori di Sylvester si intrecciarono in maniera naturale con quelli di Cayley che anzi, sebbene più giovane, fu in certo senso il «padre spirituale» del primo.

In quel periodo Cayley era impegnato nella ricerca della soluzione di un

problema che egli stesso aveva posto in un articolo apparso nel 1846 nel «Journal» di Crelle: data una forma quadratica (non singolare) in n variabili, determinare tutte le trasformazioni lineari che lasciano invariata la forma. In un problema analogo si era imbattuto anche Hermite nel corso delle sue ricerche sulla teoria aritmetica delle forme ternarie. Il problema di Cayley-Hermite fu di importanza decisiva nello sviluppo dell'algebra delle matrici, che Cayley presentò in un celebre articolo del 1858, seguito da due memorie dedicate particolarmente al problema in questione.

«Io certamente non sono arrivato alla nozione di matrice attraverso i quaternioni; fu piuttosto o direttamente da quella di determinante o dal considerarla una maniera opportuna per esprimere le equazioni

$$x' = ax + by$$
  
 $y' = cx + dy$ 

affermava Cayley in apertura del suo lavoro. Egli introduceva così la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(o in generale, una matrice a n righe e n colonne) e definiva uguali due matrici se i loro elementi corrispondenti erano uguali. La somma di due matrici era data dalla matrice i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi nelle matrici date. Il prodotto righe per colonne di due matrici era da Cayley definito direttamente ispirandosi alla composizione di due trasformazioni lineari. Il prodotto così definito, pur essendo associativo, non era in generale commutativo. Cayley introduceva poi i concetti di matrice trasposta, simmetrica e inversa di una matrice quadrata (non singolare). In particolare, egli definiva il polinomio caratteristico di una matrice quadrata M, come il determinante det(M - tI) dove I è la matrice identica e dimostrava poi il «teorema di Cayley-Hamilton», che la matrice M soddisfa alla propria equazione caratteristica, det(M - tI) = 0.

Cayley sottolineava con forza che il concetto di matrice era logicamente antecedente quello di determinante, come oggi appare del tutto naturale. Dal punto di visto storico tuttavia le cose andarono esattamente all'opposto.

Cayley nella sua memoria raccoglieva infatti in una teoria formale delle matrici molti risultati che, in contesti diversi, erano da tempo noti ai matematici. Oltre alla teoria dei determinanti, così era per esempio per il problema degli autovalori (la ricerca delle radici dell'equazione caratteristica), già affrontato da Lagrange prima di diventare centrale nei lavori di Cauchy (1829) sui sistemi lineari, e di Sturm (1836). Anche i concetti di matrice simmetrica e ortogonale si trovano espressi, in altri termini, in Cauchy e la stessa non-commutatività del prodotto era stata rilevata da Eisenstein per le sostituzioni lineari.

Questi concetti, attraverso l'opera di Jordan, Weierstrass e del suo allievo Frobenius, portarono nel giro di cinquant'anni alla creazione della cosiddetta teoria spettrale delle matrici. In particolare Frobenius, in un lungo articolo apparso nel «Journal» di Crelle nel 1878 affrontò il problema della diagonalizzazione di una matrice e dello studio delle matrici ortogonali e hermitiane (cioè le matrici

introdotte da Hermite nel 1855 tali che M = M\*, dove M\* è la trasposta della matrice ottenuta sostituendo ad ogni elemento di M il suo complesso coniugato).

La teoria delle matrici trovò una naturale sistemazione all'inizio del secolo nell'ambito dell'algebra lineare. In quello stesso periodo, nel contesto della teoria delle equazioni integrali e della nascente analisi funzionale, particolare attenzione fu dedicata allo studio di matrici e determinanti di ordine infinito. Una teoria che, insieme a quella classica delle matrici di ordine finito, si è rivelata di enorme importanza nella moderna fisica confermando il profetico giudizio di Tait, che Cayley con la teoria delle matrici aveva forgiato «le armi per le future generazioni di fisici».

Altrettanto importanti per lo sviluppo della geometria si rivelarono le ricerche di Cayley sulle forme, che egli pubblicò in una serie di dieci *Memoirs upon quantics* apparse nelle «Philosophical Transactions» tra il 1854 e il 1878. In particolare nella sesta *Memoir* Cayley considerava l'aspetto geometrico della teoria delle *quantics*, e servendosi della teoria degli invarianti giungeva a fare chiarezza sui reciproci rapporti tra geometria proiettiva e geometria metrica (euclidea). Cayley si limitava in quella memoria a considerare la geometria della retta e del piano, « corrispondente rispettivamente alla teoria analitica delle forme (*quantics*) binarie e ternarie».

L'idea fondamentale di Cayley era che «le proprietà metriche di una figura non sono le proprietà di una figura considerata *per sé* a prescindere da qualsiasi altra cosa, ma le sue proprietà quando sono considerate in connessione con un'altra figura, cioè con la conica chiamata Assoluto» (1859, 592).

Nel caso del piano per esempio Cayley considerava una forma quadratica  $F(x,x) = \sum\limits_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k \ (a_{ik} = a_{ki}) \ e \ la forma bilineare \\ F(x,y) = \sum\limits_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i y_k. \\ L'equazione \\ F(x,x) = 0 \ rappresenta una conica che Cayley chiamò l'Assoluto. Dati allora due punti in coordinate omogenee <math>x = (x_1,x_2,x_3)$  e  $y = (y_1,y_2,y_3)$  la formula

$$D = \operatorname{arc} \cos \frac{F(x,y)}{[F(x,x) \cdot F(y,y)]^{\frac{1}{2}}}$$

che egli dimostrò essere un covariante dell'Assoluto, si può assumere come distanza di x da y giacché verifica la condizione generale:

$$D(x,y) + D(y,z) = D(x,z)$$

qualunque siano i punti x, y, z. In maniera analoga, ricorrendo alle coordinate plückeriane di retta egli riusciva a esprimere l'angolo formato da due rette. Egli osservava poi che le formule si semplificano se si assumeva come Assoluto la conica  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ . Prendendo poi come conica assoluta la coppia dei *punti ciclici*, le formule per le distanze e gli angoli si riducevano ad essere quelle euclidee: «nel piano ordinario, egli osservava, l'Assoluto degenera in una coppia di punti, cioè in punti di intersezione della retta all'infinito con ogni circonferenza ossia, ciò che è lo stesso, l'Assoluto è dato dai punti ciclici all'infinito».

La conclusione di grandissima importanza teorica era che si poteva passare dal

dominio della geometria proiettiva a quello della geometria metrica «fissando una conica ... come standard di riferimento e chiamandola l'Assoluto. La geometria metrica è allora parte della geometria descrittiva [proiettiva] e la geometria descrittiva è tutta la geometria» (Ibid.). Come vedremo, tutte le implicazioni presenti in queste affermazioni di Cayley furono colte e sviluppate pochi anni più tardi da F. Klein.

La teoria degli invarianti e la sua applicazione alla geometria divennero patrimonio comune dei matematici anche grazie ai trattati di George Salmon (1819-1904), il terzo componente della «triade» degli invarianti, che legò la sua esistenza al Trinity College di Dublino, prima come studente e poi come professore di matematica e teologia. Non dotato della forza inventiva e della fantasia creatrice di Cayley e Sylvester, Salmon si impegnò nella diffusione delle loro idee e dei loro risultati. Le sue Conic sections (1848) e le Higher plane curves (1852) così come le Lessons introductory to modern higher algebra (1859) e la Geometry of three dimensions (1862), trattati che conobbero numerose ristampe e traduzioni all'estero e su cui si formarono generazioni di studenti, sono ancora oggi testi classici sull'argomento.

# 4. Il «programma di Erlangen».

Per circa trent'anni, dal 1840 al 1870, un gran numero di matematici si dedicò alla soluzione di quello che appariva il problema principale della teoria degli invarianti, determinare cioè nuovi invarianti particolari per date forme. Proprio i continui successi nella risoluzione di questi «rompicapo» fecero tuttavia emergere come questione teorica fondamentale quella che Cayley aveva intravisto nel 1846: trovare per una data forma un sistema completo di invarianti, cioè il più piccolo numero possibile di invarianti e covarianti tali che ogni altro invariante o covariante della forma potesse essere espresso come funzione razionale intera a coefficienti numerici degli invarianti del sistema.

Dopo alcuni risultati dello stesso Cayley, la questione era stata ripresa da Gordan, che alla teoria degli invarianti dedicò la maggior parte della propria attività di ricerca. Egli riuscì a dimostrare nel 1868 che ad ogni forma binaria f(x,y) è associato un sistema completo finito (una base, come si dice anche) di invarianti razionali interi. Questo teorema, noto col nome di Clebsch-Gordan poiché questi si servì nella dimostrazione di teoremi di Clebsch, fu qualche tempo dopo completato dallo stesso Gordan con la dimostrazione che ogni sistema finito di forme binarie possiede una base finita di invarianti. Le dimostrazioni di Gordan, il «re degli invarianti» come fu chiamato, sono lunghe e complesse e implicano la computazione effettiva degli invarianti della base.

Per circa vent'anni Gordan cercò di estendere il suo teorema ad altre forme, un lavoro computazionale enorme cui presero parte diversi altri matematici, finché, come vedremo, Hilbert nel 1888 risolse il problema in una maniera del tutto generale e inaspettata.

Le ricerche di Clebsch e Gordan sugli invarianti avevano attirato l'attenzione del giovane Felix Klein (1849-1925) sui lavori di Cayley, in particolare sulle *Memoirs upon quantics*.

Klein compì gli studi a Bonn con Plücker, di cui divenne assistente, prima di trasferirsi per qualche tempo a Gottinga dove subì l'influenza di Clebsch. Decisivo nella formazione scientifica di Klein fu poi il breve periodo trascorso a Parigi nel 1870, interrotto per la guerra franco-prussiana. Nella capitale francese Klein strinse una profonda e duratura amicizia col giovane matematico norvegese Sophus Lie (1842-1899). Insieme i due studiarono le opere di Serret e soprattutto di Camille Jordan, il cui *Traité des substitutions* appena pubblicato apparve loro «un libro dai sette sigilli», come raccontò poi Klein.

Il periodo creativo di Klein è compreso nello spazio di poco più di dieci anni, dai suoi primi lavori ispirati alla sesta *Memoir* di Cayley fino al teorema di uniformizzazione (v. sopra). Lo sforzo per trovarne la dimostrazione gli causò un *breakdown* intellettuale, che gli impedì in seguito di raggiungere e mantenere la concentrazione necessaria alla ricerca. Egli si dedicò allora essenzialmente all'attività didattica e organizzativa, profondendo le sue energie in una ampia opera di riforma dell'insegnamento scientifico in Germania e facendo di Gottinga un centro di prestigio internazionale per la matematica.

Nel 1869 Klein aveva preso parte al seminario matematico tenuto a Berlino da Kummer e Weierstrass, dove aveva anche tenuto una conferenza sulla determinazione di Cayley della distanza in termini proiettivi. Klein concludeva la sua conferenza con la domanda se non esistesse una qualche relazione tra il concetto di distanza secondo Cayley e le geometrie non euclidee. «Weierstrass lo negò — ricorda Klein (1921, 51) — chiarendo che era la distanza fra due punti la nozione da cui necessariamente partire per fondare la geometria e, conseguentemente, egli richiedeva che la retta fosse definita come il più breve cammino tra essi».

Klein riconsiderò la questione nel 1871, lavorando in stretto contatto con Clebsch e Lie. Egli prese le mosse dalla critica del passo iniziale di Cayley: l'introduzione delle coordinate. Per Cayley si trattava semplicemente di variabili senza un particolare significato geometrico oppure, in maniera classica, di distanze (o di rapporti di distanze). Ma von Staudt aveva mostrato come definire le coordinate senza ricorrere a nozioni metriche, e Klein faceva propria la costruzione di von Staudt per evitare di incorrere in un circolo vizioso.

Cayley aveva poi trattato in particolare la geometria piana: Klein ne estendeva le considerazioni allo spazio, assumendo una qualunque superficie del 2° ordine come «superficie fondamentale» (l'«Assoluto» di Cayley). Considerati poi due punti qualunque dello spazio, la retta che li congiunge interseca la superficie fondamentale in due punti. Klein considerava il birapporto di questi quattro punti e chiamava «distanza» dei due punti dati il logaritmo di tale birapporto, moltiplicato per una costante arbitraria. In maniera analoga egli definiva poi l'angolo tra due piani dello spazio. Le espressioni per la distanza di Cayley e di Klein, pur definite in modo diverso, erano tuttavia le stesse per un'opportuna scelta della costante.

Klein mostrava a questo punto che la metrica dipendeva essenzialmente dalla scelta della superficie fondamentale: «1) La superficie fondamentale è immaginaria. Ciò dà luogo alla geometria ellittica. 2) La superficie fondamentale è reale, non

rigata e ci racchiude. È l'ipotesi della geometria iperbolica. 3) (Caso di transizione) La superficie fondamentale degenera in una curva immaginaria. È l'assunzione dell'ordinaria geometria parabolica» (Klein [1871], 1921, 252).

In questo articolo, dal significativo titolo Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (Sulla cosiddetta geometria non euclidea). Klein provava dunque che la geometria euclidea e quelle non euclidee si potevano considerare come casi speciali o sottogeometrie della geometria proiettiva, dipendenti dalla scelta della quadrica fondamentale. Per indicare le varie geometrie Klein introduceva i termini (rimasti in uso); iperbolico, parabolico e ellittico. Una scelta suggerita dal fatto che nella geometria iperbolica (di Lobacevskij) una qualunque retta incontra la quadrica fondamentale in due punti reali, così come l'iperbole incontra la retta impropria in due punti reali. In modo analogo, nella geometria parabolica (euclidea) ogni retta incontra l'assoluto in un punto reale, cosi come un'ordinaria parabola ha un punto reale di contatto con la retta impropria. Un analogo parallelo si può stabilire per la geometria ellittica e il comportamento di un'ordinaria ellisse rispetto alla retta all'infinito. Klein distingueva inoltre tra geometria ellittica (un cui modello è una semisfera compreso il contorno) e la geometria doppiamente ellittica, dove due punti qualunque non determinano univocamente una retta (come appare evidente dal modello della geometria sferica, pensando a due punti diametralmente opposti).

Nel suo lavoro Klein sottolineava che la geometria proiettiva si rivelava indipendente dal postulato delle parallele, un'osservazione che apriva la via alla fondazione assiomatica della geometria proiettiva e delle altre geometrie.

I diversi articoli che Klein presentò sull'argomento, dopo la sua nota iniziale del 1871, incontrarono critiche sia dal versante filosofico che matematico. Anche Cayley non rinunciò mai alla convinzione che nelle conclusioni di Klein si nascondesse un circolo vizioso, mentre tra coloro che immediatamente si schierarono dalla sua parte Klein ricordava Clifford, che nel suo *Preliminary sketch on biquaternions* generalizzava il concetto di parallelismo alle cosiddette « parallele sghembe » dello spazio ellittico, studiava le proprietà della quadrica rigata ad esse correlata (quadrica di Clifford) e poneva infine il « problema di Clifford-Klein » di determinare tutte le varietà bidimensionali a curvatura costante, ovunque regolari — problema che trovò una trattazione sistematica nell'opera di W. Killing (1847-1923) *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* (Introduzione ai fondamenti della geometria, 1893).

Nel 1872 a soli ventitré anni Klein fu nominato professore ordinario di geometria a Erlangen. Come d'uso, in occasione dell'accoglimento nella Facoltà e nel Senato dell'Università Klein pubblicò un *Programm*, uno scritto in cui presentava le idee che avevano guidato la sua ricerca. L'opuscolo dal titolo *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti), noto semplicemente come «programma di Erlangen», rappresenta uno dei testi più influenti della matematica moderna.

Klein vi esponeva « metodi e punti di vista che vennero svolti in lavori recenti di Lie e miei. I nostri lavori, per quanto fossero diversi gli oggetti cui si riferivano, pure d'accordo sono entrati in questo modo generale di considerazione» ([1872], 1890, 2), di considerare cioè le proprietà geometriche rispetto a gruppi di trasformazioni. L'idea fondamentale di Klein e Lie era dunque quella di applicare la teoria dei gruppi, nella sistemazione datane da Jordan, alle teorie geometriche.

Nel suo *Programm* Klein cominciava con l'osservare che le trasformazioni dello spazio in sé formano un gruppo. La terminologia non era molto precisa: Klein si limitava ad affermare che «componendo assieme quante si vogliano trasformazioni dello spazio si ha sempre di nuovo una trasformazione». In realtà — come riconosceva più tardi lo stesso Klein — bisognava richiedere per ogni trasformazione l'esistenza dell'inversa (oltre a definire in maniera rigorosa il concetto di «trasformazione»).

Come esempi di gruppi Klein suggeriva quello dei movimenti nello spazio e il suo sottogruppo dato dalle rotazioni intorno a un punto fisso. Il gruppo dei movimenti era a sua volta un sottogruppo del gruppo delle collineazioni.

L'osservazione cruciale era che «vi sono nello spazio delle trasformazioni che non alterano affatto le proprietà geometriche dei corpi» (*Ibid.*), dove per proprietà geometriche Klein intendeva quelle indipendenti dalla posizione della figura da studiare nello spazio, dalla sua grandezza assoluta e dall'ordinamento delle sue parti. Egli chiamava «gruppo principale» il gruppo di trasformazioni che lascia inalterate tali proprietà. Facendo poi astrazione «dall'immagine sensibile» e considerando in luogo dello spazio tridimensionale una qualunque varietà e un qualunque gruppo di trasformazioni sulla varietà, «come generalizzazione della Geometria» Klein enunciava il seguente problema generale: «È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni; studiare le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato» ([1872], 1890, 5). Un problema che equivalentemente si poteva formulare come: «È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni. Si sviluppi la teoria invariantiva relativa al gruppo medesimo» (*Ibid.*).

Per una data varietà, dal punto di vista algebrico il programma di Klein si traduceva nello sviluppo della teoria degli invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni «aggiunto» (come diceva Klein) alla varietà e ai suoi sottogruppi. In questo modo egli riusciva a classificare le varie geometrie, dalla proiettiva all'euclidea, abbracciando da un punto di vista unitario campi diversi e apparentemente lontani della ricerca geometrica che «nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline quasi separate, che vanno progredendo alquanto indipendentemente le une dalle altre» (*Ibid.*, 2).

Due teorie geometriche a prima vista distinte potevano dunque rivelarsi «equivalenti» (gleichbedeutend) nel senso che una corrispondenza biunivoca tra «Raumelementen» opportunamente scelti nelle due varietà induceva (in termini moderni) un isomorfismo tra i rispettivi gruppi di trasformazioni. Così ad esempio, nel linguaggio di Klein, «la geometria elementare del piano e la trattazione proiettiva di una quadrica con un suo punto come fondamentale sono la stessa cosa» (Ibid., 11). Klein riusciva così a dar conto anche di particolari geometrie come quella dei raggi vettori reciproci, la «geometria delle sfere» e quella delle trasformazioni di contatto.

Quest'ultima teoria è caratterizzata dal fatto che «superfici tangenti si trasformano in generale di nuovo in superfici tangenti, il che dà ragione del nome di trasformazioni di contatto» (*Ibid.*, 25). Klein accennava inoltre ai legami tra tale teoria e quella delle equazioni alle derivate parziali del prim'ordine, un complesso di problemi che vedremo trattato da Lie.

Nelle Osservazioni finali, dopo aver sottolineato che il punto di vista proposto consentiva di superare l'annosa e sterile polemica fra «scuole» in geometria, Klein aggiungeva che d'altra parte la realizzazione del «programma» richiedeva lo sviluppo di una «teoria delle trasformazioni» analoga a quella di Galois per le equazioni algebriche. Là si aveva a che fare con «un numero finito di elementi discreti, qui invece col numero infinito degli elementi di una varietà continua» (Ibid., 29). Ma proprio in un tale contesto, concludeva Klein, si caratterizzavano pienamente «talune ricerche incominciate da Lie e da me».

# 5. Gruppi di trasformazioni.

La figura di Lie si affaccia continuamente dalle pagine del «programma di Erlangen» ed è difficile stabilire fino a che punto le idee ivi contenute siano essenzialmente di Klein o piuttosto il frutto di una comune elaborazione, come lasciò intendere Lie nel 1888. I due matematici continuarono a mantenersi in contatto epistolare anche quando Klein si trasferì a Monaco e poi a Lipsia, mentre Lie ritornò in Norvegia dove rimase finché nel 1886 fu chiamato a ricoprire la cattedra di Klein, che aveva accettato la nomina a Gottinga.

Fu significativamente Lie, d'altra parte, ad affrontare l'enorme e difficile compito da Klein formulato in chiusura del «programma di Erlangen»: costruire la teoria dei gruppi (continui) di trasformazioni. Lie elaborò la sua teoria lavorando in Norvegia in un relativo isolamento e ne pubblicò i risultati in cinque successive memorie dal titolo comune *Theorie der Trasformationsgruppen* (Teoria dei gruppi di trasformazioni) apparse tra il 1876 e il 1879.

Il punto di partenza delle ricerche di Lie sui gruppi di trasformazioni risiedeva nei suoi studi sulle equazioni differenziali: «Osservai — egli scriverà diversi anni dopo — che la maggior parte delle equazioni differenziali ordinarie, la cui integrazione era condotta con metodi tradizionali, rimanevano invariate per certe classi di trasformazioni facilmente determinabili e che quei metodi di integrazione consistevano proprio nell'utilizzare questa proprietà della relativa equazione differenziale. In altri termini, mi accorsi che il concetto di invariante differenziale di un gruppo continuo finito si presentava, anche se solo in forma implicita e speciale, in ogni libro sulle equazioni differenziali ordinarie» (Lie 1888, v).

Ricondotti così i metodi tradizionali di integrazione ad un punto di vista generale e unitario, Lie si pose in maniera-naturale l'obiettivo di sviluppare una teoria dell'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie che ammettevano trasformazioni finite o infinitesimali note. Egli sviluppò questa linea di ricerca in maniera conseguente anche per le equazioni differenziali alle derivate parziali, avendo successo nel caso di quelle del 1º ordine. «Per quanto riguarda equazioni differenziali (ordinarie e alle derivate parziali) di ordine superiore, mi dovetti

limitare essenzialmente a qualche cenno. Mi era necessario infatti sviluppare anzitutto una articolata teoria ausiliaria, la teoria dei gruppi di trasformazioni» (Lie 1879, 359).

In un primo scritto di carattere programmatico Über Gruppen von Transformationen (Sui gruppi di trasformazioni, 1874) Lie dava la seguente definizione: «Si dice di una famiglia di trasformazioni

$$x'_{i} = f_{i}(x_{1},...,x_{n},\alpha_{1},...,\alpha_{r})$$

(dove le x rappresentano le variabili di partenza, le x' le nuove variabili e gli  $\alpha$  dei parametri, che nel seguito si devono pensare variabili con continuità) che esse formano un gruppo di trasformazioni a r elementi se componendo due trasformazioni qualunque della famiglia si ottiene ancora una trasformazione della famiglia, cioè se dalle equazioni

$$x'_i = f_i(x_1,...,x_n; \alpha_1,...,\alpha_r)$$

e

$$x_i'' = f_i(x_1',...,x_n'; \beta_1,...,\beta_r)$$

si ha

$$x_i'' = f_i(x_1,...,x_n; \gamma_1,...,\gamma_r)$$

dove le  $\gamma$  rappresentano grandezze, che dipendono solo dalle  $\alpha$  e  $\beta$ » (1874, 1).

Da questo primo lavoro Lie prendeva le mosse per la costruzione della sua «teoria ausiliaria», che in realtà finì per costituire l'argomento privilegiato delle sue ricerche. Ai primi lavori dedicati ai gruppi finiti fece seguito, nel 1883, una memoria in cui Lie introduceva la distinzione tra gruppi finiti e infiniti (continui); in tutti però lo studio dei gruppi di trasformazioni era condotto servendosi delle trasformazioni infinitesimali (intimamente collegate alle trasformazioni di contatto). Di più, secondo Hawkins (1984, 446) «il momento critico che apparentemente diede a Lie il coraggio di affrontare l'impresa di creare la sua teoria si verificò nell'autunno del 1873, quando egli scoprì che poteva determinare tutti i gruppi continui di trasformazioni in una variabile utilizzando le "algebre di Lie" di trasformazioni infinitesimali ad esse associate».

Nel 1883 Lie aveva ottenuto anche una classificazione completa dei gruppi continui, mentre l'anno successivo Klein pubblicava una classificazione analoga per i gruppi discontinui nel volume Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade (Lezioni sulla teoria dell'icosaedro e la risoluzione delle equazioni di quinto grado). Ricordando il periodo dei loro studi comuni e la decisione allora maturata di dedicarsi allo studio degli «enti analitici o geometrici che sono trasformati in se stessi da gruppi di trasformazioni», Klein scriveva che mentre Lie si era dedicato essenzialmente alla teoria dei gruppi continui, egli aveva preso in considerazione quella dei gruppi discreti, in particolare le operazioni sui corpi regolari e le loro applicazioni alla teoria delle equazioni. Nello stesso contesto si collocavano le ricerche sulle funzioni modulari e automorfe, che Klein pubblicò nei due volumi delle Vorlesungen über die elliptischen Modulfunktionen (Lezioni

sulle funzioni modulari ellittiche), edite nel 1890 e 1892 con la collaborazione del suo allievo R. Fricke (1861-1930).

A Lipsia, Lie dedicò i suoi corsi alla teoria dei gruppi di trasformazioni continui. Nelle sue lezioni, raccolte nei tre ponderosi volumi *Theorie der Transformationsgruppen* (Teoria dei gruppi di trasformazioni, 1888-1893) grazie alla preziosa assistenza del suo allievo F. Engel (1861-1941), Lie raccoglieva in una forma sistematica i risultati sull'argomento ottenuti in oltre quindici anni di ricerche. Nel 1896 Lie pubblicava poi la *Geometrie der Berührungstransformationen* (Geometria delle trasformazioni di contatto), in collaborazione con il suo exallievo G. Scheffers (1866-1945). La trattazione sistematica della teoria dell'integrazione delle equazioni differenziali dal punto di vista della teoria dei gruppi di trasformazione, annunciata in apertura del terzo volume della *Theorie*, non fu da Lie mai completata. La effettiva costruzione della «teoria di Galois delle equazioni differenziali», un problema teorico già formulato da Lie nel 1874, fu intrapresa da Picard tra il 1883 e il 1887 e compiutamente realizzata a partire dal 1892 da E. Vessiot (1865-1952), che aveva studiato a Lipsia con Lie.

A Parigi le idee di Lie avevano trovato apprezzamenti entusiastici. «Avete creato una teoria d'una importanza capitale, che sarà annoverata come una delle opere matematiche più notevoli della seconda metà di questo secolo», gli scriveva ammirato Picard nel 1888.

Anche Poincaré, con Picard e Gaston Darboux (1842-1917), uno dei leaders della comunità matematica francese dell'epoca, era profondamente convinto dell'importanza decisiva della teoria dei gruppi nei più diversi campi della matematica. Sotto l'influenza di Jordan, fin dal 1880, studiando le funzioni automorfe e i loro rapporti con la geometria di Lobacevskij, Poincaré era giunto alla conclusione che la geometria non era altro che «lo studio del gruppo di operazioni formate dagli spostamenti cui possiamo assoggettare una figura senza deformarla».

All'epoca Poincaré non aveva alcuna idea del «programma di Erlangen» (il cui contenuto gli fu descritto da Lie durante una sua visita a Parigi nel 1882) ma, come Picard, era stato profondamente impressionato dai lavori sui gruppi del geometra norvegese. Su suggerimento di Poincaré e Picard i migliori allievi dell'École Normale, diretta da Darboux e fucina di generazioni di matematici, furono incoraggiati a studiare la teoria di Lie se non a seguirne le lezioni a Lipsia.

Da parte sua Poincaré, nell'arco di un decennio, tra il 1883 e il 1892, pubblicò una quantità di articoli in cui applicava la teoria di Lie alle funzioni di variabile complessa, alla teoria delle equazioni differenziali, alla geometria algebrica e allo studio dei fondamenti della geometria. Nell'articolo Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie (1887) ad esempio, Poincaré servendosi dei gruppi di Lie risolveva il «problema di Helmholtz-Lie» nel piano, un problema che lo stesso Lie aveva ripreso l'anno precedente e risolverà poi in maniera generale nel 1890, determinando le proprietà necessarie e sufficienti per caratterizzare il gruppo dei movimenti rigidi (euclidei e non euclidei) in uno spazio n-dimensionale e mostrando che solo in una varietà a curvatura costante sono possibili i movimenti rigidi di una figura.

L'influenza del pensiero geometrico di Lie cominciò a farsi sentire anche in Germania, dove dominavano le concezioni aritmetiche dell'analisi sostenute da Weierstrass e dalla sua scuola. Alle idee di Lie si ispirò per esempio Eduard Study (1862-1930) che fu poi uno dei più convinti sostenitori dello studio della geometria nel senso di Klein, cui contribuì in maniera significativa tra la fine del secolo e i primi del Novecento. Anche Killing, che era autonomamente pervenuto ad elaborare un programma di ricerca che si legava intimamente alla teoria delle trasformazioni infinitesimali di Lie, fu da questi esortato a studiare più da vicino la possibilità di classificare le cosiddette «algebre di Lie».

L'imponente sviluppo raggiunto dalla teoria dei gruppi di trasformazioni verso la fine degli anni '80 convinse Klein che era sempre più opportuno dare maggiore diffusione al suo antico «programma», rimasto confinato in un opuscolo che aveva conosciuto una limitata circolazione. Così, tra il 1890 e il 1893 ne comparvero traduzioni in italiano, francese e inglese, oltre a una ristampa sui «Mathematische Annalen». Lo stesso Klein dedicava parte del suo corso di geometria superiore a illustrarne il contenuto e le applicazioni.

Così, nell'ultimo decennio del secolo, le idee del «programma di Erlangen», unitamente alla teoria di Lie, si radicarono profondamente nel pensiero matematico ed esercitarono una enorme influenza non solo sullo sviluppo della geometria nel nostro secolo ma anche su larghi settori della moderna fisica teorica.

#### **BIBLIOGRAFIA**

Testi

- A. Cayley, *The collected mathematical papers*, Cambridge, Cambridge University Press, 1889-1897, 13 voll. (reprint New York, Johnson Reprint Corporation, 1963).
- ID., A sixth memoir upon quantics, in «Philosophical Transactions of the Royal Society London», vol. 149, 1859, pp. 61-90 (reprint in Collected mathematical papers, cit., vol. 2, pp. 561-592).
- L. CREMONA, Opere matematiche, Milano, Hoepli, 1914-1917, 3 voll.

  ID., Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, in «Giornale di Matematiche», vol. 1, 1863, pp. 305-311 (reprint in Opere matematiche, cit., vol. 1, pp. 54-61).
- H. Grassmann, Gesammelte mathematische und physikalische Werke, a cura di F. Engel, Leipzig, Teubner, 1894-1911, 3 voll., 6 parti.
- ID., Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, Leipzig 1844 (reprint in Gesammelte mathematische und physikalische Werke, cit., vol. 1-1, pp. 1-295).
- F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, a cura di R. Fricke e A. Ostrowski, Berlin, Springer, 1921-1923, 3 voll.
- ID., Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, in «Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen», vol. 17, 1871 (reprint in Gesammelte mathematische Abhandlungen, cit., vol. 1, pp. 244-253).
- In., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen, A. Deichert, 1872 (reprint in Gesammelte mathematische Abhandlungen, cit., vol. 1, pp. 460-497; trad. it., Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti, a cura di G. Fano, in «Annali di matematica pura e applicata», ser. 2, vol. 17, 1890, pp. 1-37).
- S. Lie, Gesammelte Abhandlungen, a cura di F. Engel, Leipzig, Teubner, 1922-1935, 6 voll.

S. Lie, Über Gruppen von Transformationen, in «Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen», 1874 (reprint in Gesammelte Abhandlungen, cit., vol. 5, pp. 1-8).

In., Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig, Teubner, 1888-1893, 3 voll.

ID., Klassification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Kurven, Christiania, 1879 (reprint in Gesammelte Abhandlungen, cit., vol. 1, pp. 358-408).

J.J. SYLVESTER, The collected mathematical papers, Cambridge, Cambridge University Press, 1904-

1912, 4 voll.

## Studi

L. Berzolari, Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven, in Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. 3 C4, 1906, pp. 313-455.

A. Brill e M. Noether, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, in «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung», vol. 3, 1893, pp.

J.L. COOLIDGE, A history of geometrical methods, Oxford, Oxford University Press, 1940 (reprint New York, Dover, 1963).

M.J. CROWE, A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system, Notre Dame, University of Notre Dame Press, 1967 (reprint New York, Dover, 1985).

J. DIEUDONNÉ, Cours de géométrie algébrique, vol. 1, Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique, Paris, Presses Universitaires de France, 1974.

G. Fano, Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung, in Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig, Teubner, vol. 3 AB4a, 1906, pp. 221-388.

T. HAWKINS, Weierstrass and the theory of matrices, in «Archive for History of Exact Sciences», vol. 17, 1977, pp. 119-163.

ID., Another look at Cayley and the theory of matrices, in «Archives Internationales d'Histoire des Sciences», vol. 26, 1977, pp. 82-112.

ID., Non-Euclidean geometry and weierstrassian mathematics: the background to Killing's work on Lie algebras, in «Historia Mathematica», vol. 7, 1980, pp. 289-342.

ID., Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras, in «Archive for History of Exact Sciences», vol. 26, 1982, pp. 127-192.

ID., The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on its place in the history of mathematics, in «Historia Mathematica», vol. 11, 1984, pp. 442-470.

A.C. Lewis, H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik, in «Annals of science», vol. 34, 1977, pp. 103-162.

G. LORIA, L. Cremona et son oeuvre mathématique, in «Bibliotheca mathematica», 3 ser., vol. 5, 1904, pp. 125-195.

L. Maurer e H. Burkhardt, Kontinuierliche Transformationsgruppen, in Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. 2 A6, 1903, pp. 401-436.

F.W. MEYER, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie, in «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung», vol. 1, 1891, pp. 79-292.

M. NOETHER, Luigi Cremona, in «Mathematische Annalen», vol. 59, 1904, pp. 1-19.

ID., Francesco Brioschi, in «Mathematische Annalen», vol. 50, 1898, pp. 477-491. ID., James Joseph Sylvester, in «Mathematische Annalen», vol. 50, 1897, pp. 134-156.

In., Arthur Cayley, in «Mathematische Annalen», vol. 46, 1895, pp. 462-480.

R. Tobies, Felix Klein, Leipzig, Teubner, 1981.

R. TORRETTI, The philosophy of geometry from Riemann to Poincaré, Dordrecht, Reidel, 1978.

B.L. VAN DER WAERDEN, A history of algebra from al-Khwarizmi to Emmy Noether, New York, Springer, 1985.

H. Wussing, Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes, Berlin, VEB Verlag, 1969 (trad. ingl. The genesis of the abstract group concept, Cambridge, Mass., MIT Press, 1984).

# XII. L'aritmetizzazione dell'analisi

Più rifletto sui principi della teoria delle funzioni — cosa che faccio continuamente — più ferma diventa la mia convinzione che tale teoria debba essere costruita sul fondamento di verità algebriche.

WEIERSTRASS

 Discorsi con i matematici di Berlino. - 2. L'uomo aritmetizza. - 3. Insiemi infiniti di punti. - 4. La Funktionenlebre di Weierstrass.

## 1. Discorsi con i matematici di Berlino

«La continuità è ancora un'idea confusa» diceva Leopold Kronecker al matematico italiano Felice Casorati, il giovane professore di analisi all'università di Pavia che nell'autunno del 1864 si era recato a Berlino per familiarizzarsi con le tematiche che venivano discusse in quello che si avviava a diventare il centro ispiratore delle nuove tendenze in analisi.

I più recenti sviluppi avevano infatti rivelato ai matematici che non si lasciavano abbagliare dalla grande messe di risultati che si erano ottenuti in questo campo, quanto precari fossero in realtà i fondamenti delle nozioni apparentemente più sicure, come quella di continuità di una funzione o di derivabilità e i loro reciproci rapporti; addirittura il concetto stesso di funzione sembrava mancare di una base rigorosa.

Qui non si trattava tanto di una astratta esigenza di rigore, quanto della necessità di un'indagine accurata sollecitata dalla pratica e senza la quale la ricerca rischiava di perdersi in una selva di errori, paradossi e controesempi, come accadeva lavorando con serie di Fourier o più in generale serie trigonometriche. Proprio lo studio di tali serie, d'altra parte, aveva rivelato una quantità di problemi di analisi pura, come aveva intuito Dirichlet nella sua lontana memoria del 1829 e aveva mostrato concretamente Riemann nel suo scritto di abilitazione che, seppur non pubblicato, doveva esser sufficientemente noto negli ambienti matematici berlinesi. Riemann inoltre aveva ripreso e meglio argomentato le sue idee sulle serie trigonometriche e l'integrazione nelle sue lezioni a Gottinga, i cui contenuti erano stati resi noti attraverso i quaderni di appunti raccolti dai suoi studenti.

Quanto alla continuità, trattando nelle pagine iniziali della sua dissertazione le funzioni di una variabile reale, Riemann aveva definito continua in [a, b] una funzione w(z) quando «per una grandezza qualunque data  $\varepsilon$ , si può sempre determinare la grandezza  $\alpha$ , tale che in un intervallo, relativo a z, minore di  $\alpha$ , la differenza tra due valori di w non sia mai maggiore di  $\varepsilon$ » (Riemann [1851], [1953], [195

Anche Weierstrass dava della continuità una definizione analoga a quella riemanniana, espressa tuttavia nel più accurato stile degli «epsilon-delta» di cui la matematica porta ancora oggi l'impronta.

Fino dal 1861 Weierstrass affermava infatti a lezione che una funzione f(x) era continua in x «se è possibile determinare un valore  $\delta$  tale che per ogni valore di h,