Basi di numerazione

Le modalità di scrittura dei numeri dipendono da abitudini culturali.

L'utilizzo della scrittura posizionale (che assegna allo stesso simbolo valore differente a seconda della "posizione" in cui è scritto) permette di rappresentare un qualsiasi numero naturale attraverso un insieme limitato simboli. La scrittura dei numeri adottata dagli antichi Romani non aveva, ad esempio, questo pregio, ma richiedeva di inventare sempre nuovi simboli per rappresentare numeri di volta in volta più grandi.

Per scrivere un qualunque numero naturale utilizziamo ora, usualmente, la scrittura posizionale e 10 simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ma le modalità della scrittura posizionale possono essere applicate e utilizzate fissando a piacere il numero di simboli da utilizzare. In alcuni contesti, è anzi decisamente conveniente selezionare un numero di simboli diverso da dieci.

Il numero di simboli selezionati (è l'analogo della scelta dell'alfabeto con cui formare tutte le parole) prende il nome di **base di numerazione**. Faremo esempi legati a basi di numerazioni minori o uguali a 10 e, per semplicità, useremo come simboli le cifre consuete (purchè inferiori alla base di numerazione). Ad esempio, se la base di numerazione fissata è 7, i simboli da utilizzare come cifre saranno 0,1,2,3,4,5,6.

Scrittura in forma polinomiale e scrittura in una base

La scrittura posizionale si basa sulla possibiità di scrivere i numeri in forma polinomiale. Ad esempio, nella scrittura decimale (cioè in base 10) il numero 1234 corrisponde a

$$1234 = 1 \text{ migliaio} + 2 \text{ centinaia} + 3 \text{ decine} + 4 \text{ unità} =$$
$$=1\cdot 1000+ 2 \cdot 100+ 3\cdot 10 + 4$$

Utilizzando le potenze di 10, posso riformularlo come segue:

$$1234= 1\cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2+ 3\cdot 10 + 4 \cdot 10^0$$

che prende il nome di scrittura in *forma polinomiale in base 10*; le cifre 1,2,3,4, sono i *coefficienti* della forma polinomiale; in particolare, 1 è il coefficiente di 10^3, 2 di 10^2, 3 di $10 =10^1$, 4 il termine delle unità ($10^{0=1}$). La scrittura 1234 è semplicemente la forma abbreviata della scrittura in forma polinomiale; tenendo memoria precisa dell'ordine in cui compaiono i coefficienti, possiamo evitare di riportare tutte le potenze di 10 e scrivere semplicemente la successione ordinata dei coefficienti: la rappresentazione diventa più leggera e maneggevole. Le cifre dei coefficienti vengono rigorosamente elencate a partire dal coefficiente della potenza maggiore (e inserendo 0 ove il coefficiente sia nullo).

In modo analogo, la forma polinomiale

$$4 \cdot 7^5 + 3 \cdot 7^4+ 5 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2+ 0 \cdot 7 + 6 \cdot 7^0$$

viene rappresentata in base 7 con la scrittura

$$\mathbf{(435106)_7}\ ;$$

di nuovo, le cifre dei coefficienti vengono rigorosamente elencate a partire dal coefficiente della potenza maggiore (e inserendo 0 ove il coefficiente sia nullo). La successione di numeri così trovata viene chiusa tra parentesi, e la base della numerazione viene indicata come pedice. Dunque, l'espressione $(2035612)_7$ rappresenta il numero:

$$(2035612)_7 = 2 \cdot 7^6 + 0 \cdot 7^5 + 3 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 7^0$$

Per essere precisi, il numero 1234 utilizzato nell'esempio iniziale andava scritto come $(1234)_{10}$. ; ma, per semplicità, se la base non è esplicitamente indicata si intenderà sempre la base 10.

Esercizio: Dimostra che $1234 = (3412)_7$, cioè che

$$1234 = 3 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 7^0\ .$$

In modo analogo si lavora con le altre basi: comunque fissati un numero naturale e una base, è possibile scrivere il numero scelto come forma polinomiale nella base fissata (e poi nella forma compatta che utilizza la scrittura posizionale).

Osserva che, in generale, *riducendo la base, la scrittura del numero richiede un maggior numero di cifre*.

Esercizio 1: Controlla che $1234 = 1 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 5^0$ e determina la scrittura in base 5 di 1234.

Esercizio 2: Determina la scrittura in base 5 del numero

$$4 \cdot 5^8 + 3 \cdot 5^7 + 3 \cdot 5^5 + 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1$$

Passare da una base all'altra

1. Per individuare la scrittura decimale di un numero di cui conosciamo la scrittura in una data base:

- a partire dalla scrittura in una base assegnata, formiamo la scrittura in forma polinomiale
- valutiamo la forma polinomiale svolgendo esplicitamente i calcoli.

Esempio: $(10111)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 16+4+2+1 = 23$.

2.Viceversa, per individuare la scrittura in una data base di un numero n di cui conosciamo la scrittura decimale, occorre procedere con una serie di divisioni. Chiamiamo a la base utilizzata per illustrare la procedura.

- a partire dalla scrittura decimale, dividiamo *n* per *a* calcolando il risultato e il resto.
- procediamo continuando, ad ogni passo, a dividere per *a* il risultato della divisione precedente.
- interrompiamo quando il risultato è 0.
- Per ottenere la scrittura in base *a* di *n*, ricopiamo da sinistra a destra tutti i resti ottenuti, dall'ultimo al primo.

Esempio: Vogliamo scrivere 346 in base 5. Eseguo le divisioni:

346 : 5 = 69 con resto di **1**

69 : 5 = 13 con resto di **4**

13 : 5 = 2 con resto di **3**

2:5 = **0** con resto di **2**. Concludo che $346 = (2341)_5$

Infatti: 346 : 5 = 69 con resto di **1** **significa che** $\mathbf{346 = 5 \cdot 69 + 1}$

69 : 5 = 13 con resto di **4** **significa che** $\mathbf{69 = 5 \cdot 13 + 4}$

13 : 5 = 2 con resto di **3** **significa che** $\mathbf{13 = 5 \cdot 2 + 3}$

2:5 = **0** con resto di **2**.

Cominciamo dalla prima delle uguaglianza sulla destra; sostituiamo ad una ad una le altre (una sostituzione ad ogni cambio di riga) e poi riordiniamo:

$$346 = 5 \cdot 69 + \mathbf{1} = 346 =$$
$$5 \cdot (5 \cdot 13 + \mathbf{4}) + \mathbf{1} = 5 \cdot \ 5 \cdot 13 + 5 \cdot \mathbf{4} \ + \mathbf{1} = 5^2 \cdot 13 + 5 \cdot \mathbf{4} \ + 1 =$$
$$5^2 \cdot (5 \cdot 2 + \mathbf{3}) + 5 \cdot \mathbf{4} + \mathbf{1} = 5^2 \cdot 5 \cdot 2 + 5^2 \cdot \mathbf{3} \ + 5 \cdot \mathbf{4} \ + \mathbf{1} = 5^3 \cdot 2 + 5^2 \cdot \mathbf{3} + 5 \cdot \mathbf{4} + \mathbf{1}$$

La procedura utilizzata per ottenere calcolare le cifre della scrittura in base *a* illustra perchè tale scrittura esiste sempre.

Esercizi:
1.Calcola la scrittura di 4517 in base 5 e in base 9.
2.Dimostra che il numero $(4310)_5$ è divisibile per 5.
3. Utilizzando il materiale multibase in base 4, componi il numero $(213)_4$.

Somma di due numeri in base arbitraria

Poichè la scrittura in base arbitraria è posizionale, per calcolare la somma è possibile utilizzare il consueto metodo (o algoritmo) di calcolo. L'unica differenza da tenere a memoria è che il "riporto" viene utilizzato non appena si ottiene una cifra maggiore o uguale alla base utilizzata.

Esempio: $(23)_5+(11)_5 = (34)_5$

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & + \\ & 1 & 1 & = \\ \hline & 3 & 4 & \end{array}$$

Esempio: $(23)_5+(12)_5 = (40)_5$ (i riporti vengono segnalati nella prima riga)

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & 2 & 3 & + \\ & 1 & 2 & = \\ \hline & 4 & 0 & \end{array}$$

Esempio: $(123)_7+(155)_7 = (311)_7$

Sottrazione tra due numeri in base arbitraria

Analogamente all'addizione, per calcolare la differenza è possibile utilizzare il consueto metodo (o algoritmo) di calcolo. Come prima, occorre sempre ricordarsi quale è la base utilizzata.

Esempio: $(23)_5-(11)_5 = (34)_5$

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & - \\ & 1 & 1 & = \\ \hline & 1 & 2 & \end{array}$$

Esempio: $(23)_5-(14)_5 = (4)_5$

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & - \\ & 1 & 4 & = \\ \hline & & 4 & \end{array}$$

Esempio: $(423)_7-(154)_7 = (236)_7$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 3 & - \\ 1 & 5 & 4 & = \\ \hline 2 & 3 & 6 & \end{array}$$

Esercizio: Ricontrollare le operazioni precedenti trasformando i numeri in scrittura decimale.