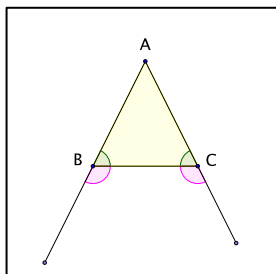


Le due proposizioni seguenti mostrano che un triangolo ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali.

Proposizione I.5

In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali e, se prolunghiamo i lati uguali, gli angoli sotto la base sono uguali.

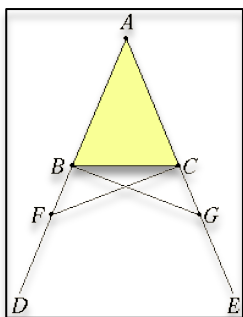
Dimostrazione



Consideriamo un triangolo isoscele (I.Def.20) ABC^{Δ} con il lato AB uguale al lato AC.

Prolunghiamo il lato AB a partire da B con BD e prolunghiamo il lato AC a partire da C con CE (post. I.2).

Vogliamo mostrare che gli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$ (in verde) sono uguali e che anche gli angoli $\widehat{CBD}$ e $\widehat{BCE}$ (in rosa) sono uguali tra loro.



Per ipotesi, i segmenti AB e AC hanno la stessa lunghezza.

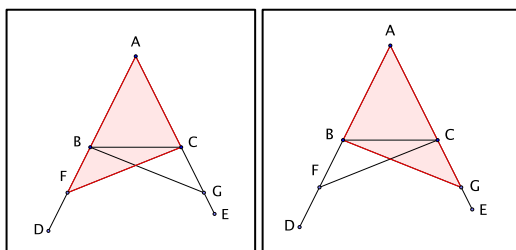
Fissiamo un punto F su BD.

Su AE, o su un suo prolungamento, prendiamo un punto G tale che AG sia lungo come AF [prop. I.3].

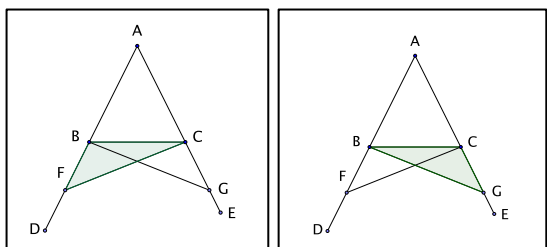
In questo modo, abbiamo ottenuto segmenti AF e AG della stessa lunghezza, perché $AF = AB + BF$ e $AG = AC + CG$ e gli addendi sono tra loro uguali.

Congiungiamo il punto B con G e il punto C con F (post. I.1)

costruzione



Consideriamo i triangoli AFC^{Δ} e AGB^{Δ} : essi hanno uguali i lati AF e AG (per quanto visto), come anche i lati AC e AB (per ipotesi). Inoltre, hanno in comune l'angolo $\widehat{FAG}$, compreso tra i lati uguali. I due triangoli sono dunque congruenti per LAL. In particolare, i segmenti FC e BG sono uguali, gli angoli $\widehat{ACF}$ e $\widehat{GBA}$ coincidono e gli angoli $\widehat{AFC}$ e $\widehat{BGA}$ coincidono.



Ora consideriamo i triangoli BFC^{Δ} e BGC^{Δ} .

Poiché il segmento AF è uguale ad AG e il segmento AB è uguale ad AC, per differenza il segmento BF è uguale a CG (NC.3).

Inoltre, i due triangoli hanno uguali i lati FC e BG e gli angoli $\widehat{BFC}$ e $\widehat{BGC}$ per quanto visto.

Dunque, i due triangoli sono congruenti per l'assioma LAL. In particolare, l'angolo $\widehat{CBF}$ ($=\widehat{CBD}^{\Delta}$) è uguale all'angolo $\widehat{BCG}$ ($=\widehat{BCE}^{\Delta}$): era uno dei risultati che volevamo dimostrare.

Abbiamo provato che gli angoli $\widehat{ABG}$ e $\widehat{ACF}$ sono congruenti tra loro e gli angoli $\widehat{CBG}$ e $\widehat{BCF}$ sono congruenti tra loro; possiamo quindi concludere che l'angolo $\widehat{ABC}$ (ottenuto da $\widehat{ABG}$ sottraendo $\widehat{CBG}$) è uguale all'angolo $\widehat{ACB}$ (ottenuto da $\widehat{ACF}$ sottraendo $\widehat{BCF}$) (C.N.3).

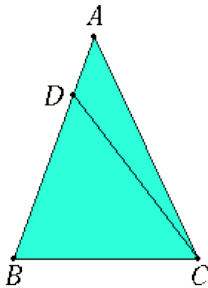
QED

La successiva proposizione è l'inversa della n.5.

Proposizione I.6

Se un triangolo ha due angoli uguali, allora i lati opposti agli angoli uguali sono uguali.

Dimostrazione



Sia ABC^{Δ} un triangolo nel quale l'angolo $\widehat{ABC}$ è uguale all'angolo $\widehat{ACB}$. Dobbiamo mostrare che i lati AB e AC sono uguali.

Procediamo per assurdo. Se AB e AC non sono uguali, uno di essi è maggiore dell'altro (C.N.).

Dunque AB è maggiore o minore di AC.

Si osservi che questa deduzione si basa su una legge non elencata nelle nozioni comuni: è detta 'legge di tricotomia' e afferma che **date due quantità omogenee AB e AC, allora $AB > AC$, oppure $AB = AC$ oppure $AB < AC$.**

Supponiamo che AB sia maggiore di AC. Nel segmento AB, fissiamo il punto D tale che BD sia uguale a AC (I.3);

tracciamo il segmento DC (I. Post. I).

Consideriamo i triangoli DBC^{Δ} e ABC^{Δ} : in essi $BD = AC$ per costruzione, BC in comune, angolo in B in comune. Per l'assioma LAL, i due triangoli sono quindi congruenti.

Per l'assioma 9, i due triangoli hanno aree uguali. Ma il triangolo DBC^{Δ} è strettamente contenuto in ABC^{Δ} , e ha dunque un'area strettamente minore. Assurdo: quindi non è possibile che AB sia maggiore di AC.

Supponiamo che AB sia minore di AC. (completare per esercizio la dimostrazione) QED

Proposizione I.7(non è richiesta la dimostrazione)

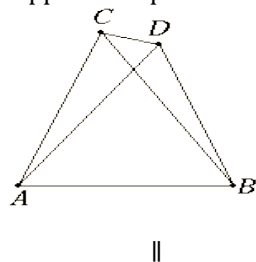
Siano dati due segmenti AC e CB costruiti, rispettivamente, a partire dai due estremi a e B di un segmento AB e che terminano in uno stesso punto C . Se

- AD ha la stessa lunghezza di AC ,
- BD ha la stessa lunghezza di BC
- (i segmenti AD e BD terminano in un punto comune punto D),
- i segmenti AD , BD , AC , CD stanno nello stesso semipiano rispetto a AB

allora $C=D$.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che $C \neq D$ e siano dati segmenti AC , CB e due altri segmenti AD e DB come nelle ipotesi e tali che $C \neq D$.



- uniamo C con D [assioma 1]

- $\widehat{ACD} > \widehat{BCD}$ (per le nozioni comuni)

$\parallel$

$\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$ [Il triangolo BCD^{Δ} ha i lati BC e BD uguali, e dunque ha uguali gli angoli alla base $\widehat{BCD}$ e $\widehat{BDC}$ [prop.5]]

ma $\widehat{BDC} > \widehat{ADC}$ per le nozioni comuni

$\parallel$

$\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$ [ACD^{Δ} ha i lati AC e CD uguali, e dunque ha uguali gli angoli alla base $\widehat{ACD}$ e $\widehat{ADC}$ [prop.5]]

Dunque, $\widehat{ADC} > \widehat{ACD}$ per la transitività delle disuguaglianze, e abbiamo trovato un assurdo.

Q.E.D.

Nota

E' stato discusso solo il caso in cui il punto D sia esterno al triangolo ACD^{Δ} : gli altri casi sono omessi da Euclide, ma possono essere dimostrati per esercizio.

Proposizione I.8(non è richiesta la dimostrazione e viene considerata una assioma, anche se tale assioma è conseguenza di altri)

Assioma LLL: Se due triangoli abbiano tre lati in corrispondenza uguali, allora i triangoli sono tra loro congruenti.

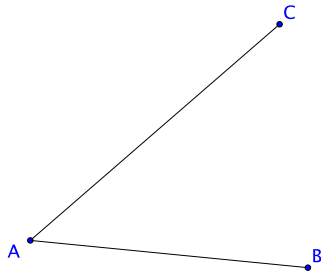
Cioè, se nei triangoli ABC^{Δ} e $A'B'C'^{\Delta}$ si ha che $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, allora $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ e i triangoli sono congruenti.

Proposizione I.9

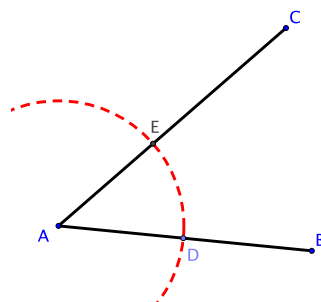
E' possibile dividere in due parti uguali un qualsiasi angolo (rettilineo) assegnato (diremo che è possibile bisecare l'angolo).

Dimostrazione

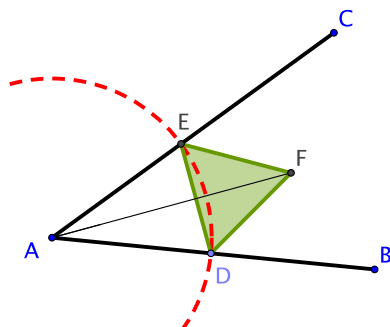
Sia BAC un angolo rettilineo assegnato.



Si fissi un punto D su AB, e un punto E su AC in modo tale che $AD=AE$ [I.3]



Si congiunga D con E [post. 1] e si costruisca un triangolo equilatero DEF di lato DE [I.1] Si congiunga A con F [post. 1]



Dimostriamo ora che AF divide a metà l'angolo BAE, cioè $BAF = FAE$.

Consideriamo il triangolo AED: in esso, $AE=AD$ per costruzione. Per la prop. I.5, gli angoli alla base AED e ADE sono uguali. Analogamente, poiché il triangolo DFE è equilatero (e quindi $EF=FD$), l'angolo EFD è uguale all'angolo FDE.

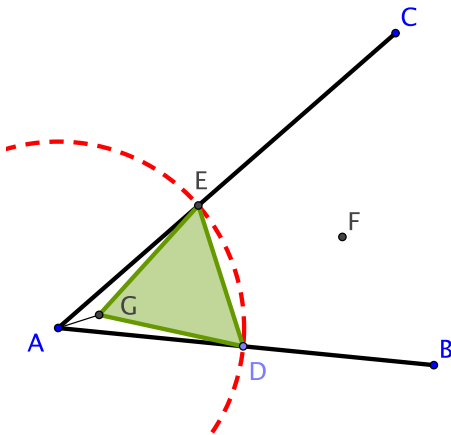
Supponiamo che il triangolo equilatero sia disposto come in figura. Poiché, per le nozioni comuni, sommando cose uguali si ottengono cose uguali tra loro, l'angolo $AEF=AED+DEF$ risulta uguale all'angolo $ADF=ADE+EDF$.

Consideriamo ora i triangoli AFE e ADF. In essi, $AE=AD$ per costruzione, AF è in comune.

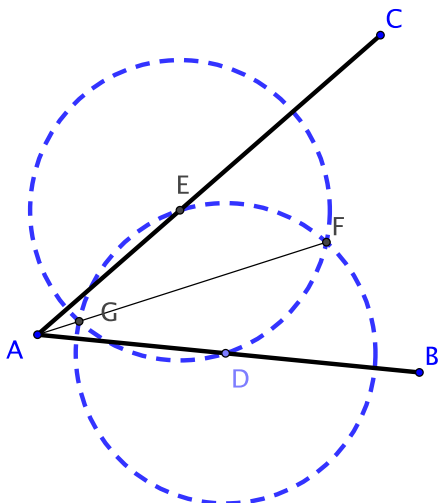
Inoltre l'angolo AEF compreso tra AE e EF coincide con l'angolo ADF compreso tra AD e DF (come appena dimostrato). Per l'assioma LAL, concludiamo che i triangoli AFE e ADF sono congruenti. In particolare, ricaviamo che l'angolo EAF è uguale all'angolo FAD (come volevamo).

[osserviamo, inoltre, che l'angolo EFA è uguale all'angolo AFD: dunque, il segmento AF risulta bisettrice anche dell'angolo EFD del triangolo equilatero.] Q.E.D.

Esercizio 1. Completa la dimostrazione nel caso il triangolo equilatero sia disposto come nella figura.



Esercizio 2. Dimostra che i punti A, G, F sono allineati, cioè i segmenti AG e AF sono uno contenuto nell'altro.



Esercizio 3. Dividi l'angolo in figura in 4 e in 8 parti uguali.

