2.1 Una teoria assiomatica per la geometria piana: Elementi di Euclide - Libro I

(testo di riferimento: L.Russo, G.Pirro, E.Salciccia, Euclide: il I libro degli Elementi, Carocci Editore, collana Frecce)

Il libro I degli Elementi di Euclide costituisce una presentazione assiomatico-deduttiva della geometria del piano (non del tutto completa).
In esso sono presentate 23 definizioni (nelle quali non vengono distinti termini primitivi e definizioni nel senso moderno del termine), alcune regole della logica aristotelica e cinque postulati. A partire da essi, Euclide discute teoremi di geometria piana relativi principalmente ai triangoli. Una osservazione successiva e recente ha permesso di notare che gli assiomi euclidei vanno integrati con ulteriori assiomi. Inoltre, non è accertato che la versione riportata sia quella autentica di Euclide, o includa revisioni successive e interventi di altri autori. Le parti riportate **contengono variazioni** rispetto alla traduzione del testo originale, nel tentativo di avvicinare la terminologia a quella attualmente in uso, e di segnalare i termini cui ora vengono attribuiti significati differenti.

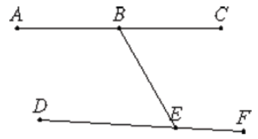
Definizioni

1) Un ***punto*** è ciò che non ha parti
2) Una ***linea*** è una lunghezza senza larghezza
3) Gli ***estremi di una linea*** sono punti
4) Un ***segmento*** (linea retta) è una linea che giace ugualmente rispetto ai suoi punti
5) Una ***superficie*** ha solo lunghezza e larghezza
6) Le estremità di una superficie sono linee
7) Una ***superficie piana*** è una superficie che giace ugualmente rispetto alle sue rette
8) Un ***angolo*** piano è l'inclinazione fra due linee in un piano che si incontrano e non giacciono su uno stesso segmento
9) e quando le linee che si incontrano sono rette l'**angolo** è detto **rettilineo**
10) Quando un segmento, innalzato a partire da un altro segmento, forma due angoli adiacenti uguali, ognuno di quegli angoli è ***retto*** e il segmento che sta sull'altro è detto ***perpendicolare***
11) Un ***angolo ottuso*** è un angolo più grande di un angolo retto
12) Un ***angolo acuto*** è un angolo più piccolo di un angolo retto
13) Un ***contorno*** è l'estremità di qualcosa
14) Una ***figura*** è ciò che è contenuta da un contorno
15) Un ***cerchio*** è una figura piana contenuta da una linea tale che tutte le linee rette che vanno su essa da un punto interno alla figura sono uguali tra di loro
16) e il punto è detto ***centro*** del cerchio
17) Un ***diametro*** del cerchio e una linea retta tracciata dal centro e che termina in entrambe le direzioni sulla circonferenza del cerchio, e questa linea retta biseca il cerchio
18) Un ***semicerchio*** è la figura contenuta dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata, e il centro del semicerchio è lo stesso del centro del cerchio
19) Figure rettilinee sono quelle contenute da linee rette, figure trilaterali (***triangoli***) sono quelle contenute da tre, quadrilaterali da quattro, e multilaterali quelle contenute da più di quattro linee rette
20) Delle figure trilaterali, un ***triangolo equilatero*** è quello che ha tre lati uguali, un triangolo isoscele è quello che ha due lati uguali e un triangolo scaleno è quello che ha i tre lati diseguali
21) inoltre delle figure trilaterali un ***triangolo rettangolo*** è quello che ha un angolo retto, un ***triangolo ottusangolo*** quello che ha un angolo ottuso e un ***triangolo acutangolo*** uno che ha i tre angoli acuti
22) Delle figure quadrilaterali, un ***quadrato*** è quello che ha sia i lati uguali che gli angoli retti, un ***rettangolo*** quello che ha gli angoli retti ma non i lati tutti uguali, un ***rombo*** è quello equilatero ma non con gli angoli retti, un ***trapezio*** quello che ha i lati e gli angoli opposti uguali a due a due ma non è equilatero e non ha angoli retti.
23) linee rette parallele sono linee rette che, essendo nello stesso piano e prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni, non si incontrano in nessuna delle due direzioni

Postulati (o assiomi):

1) È possibile disegnare un segmento tra due punti

2) È possibile prolungare un segmento
3) È possibile disegnare una circonferenza con dato raggio e dato centro
4) Tutti gli angoli retti sono uguali
5) Se una linea retta che cade su due linee rette forma angoli interni dalla stessa parte minori di due angoli retti, allora le due rette, se prolungate indefinitamente, si incontreranno dalla parte in cui gli angoli interni sono minori di due angoli retti



Se dunque la somma degli angoli ABE e BED è minore di due angoli retti, le rette AC e DF, prolungate dalla parte di A e D, si incontreranno.

Nozioni comuni (o regole di logica)

1) Cose uguali alla stessa cosa sono uguali tra loro
2) Cose uguali sommate a cose uguali danno somme uguali
3) Cose uguali sottratte a cose uguali danno differenze uguali
4) Cose coincidenti sono uguali
5) L'intero è maggiore della sua parte

A partire dalle 23 definizioni, dalle regole della logica aristotelica e dai cinque postulati, Euclide discute alcuni risultati di geometria piana relativi principalmente ai triangoli: ogni proposizione è dimostrata attraverso costruzioni garantite dagli assiomi iniziali, dalle proposizioni precedenti e dalle regole logiche. Una osservazione successiva ha permesso di notare che gli assiomi euclidei vanno integrati con ulteriori assiomi (alcuni dei quali verranno riportati all'interno della trattazione).

2.2 Le proposizioni del Primo Libro degli Elementi di Euclide

Per facilitare la lettura delle proposizioni, apporteremo alcune variazioni al testo, cercando però di salvarne lo spirito. Queste note vanno intese come tramite verso la lettura del testo euclideo, e non si sostituiscono ad esso.

Proposizione I.1

Fissato un segmento, è possibile costruire un triangolo equilatero di cui quel segmento è un lato.

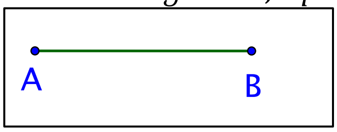
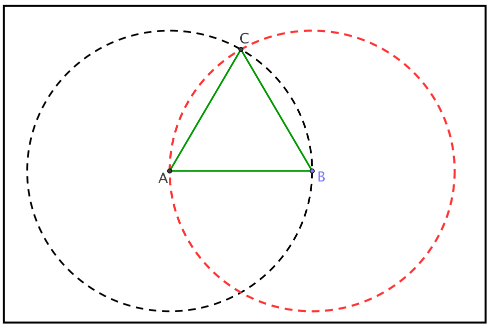


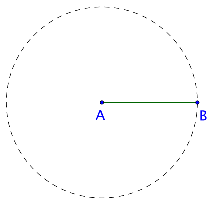
figura iniziale



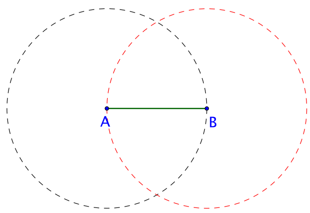
costruzione

Dimostrazione Sia AB il segmento assegnato. E' richiesto di costruire un triangolo equilatero sul segmento AB.

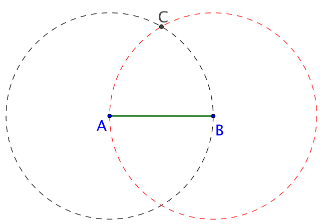
Tracciamo la circonferenza (nera) di centro A e raggio AB [assioma 3].



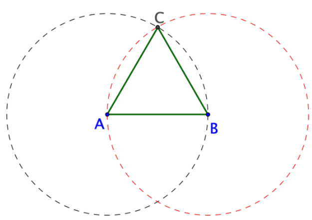
Poi tracciamo la circonferenza di centro B e raggio BA [assioma 3].



Scegliamo un punto C in cui i cerchi si intersecano [*questo passaggio non è lecito senza un ulteriore assioma che Euclide omette di introdurre: è l'assioma 6*]

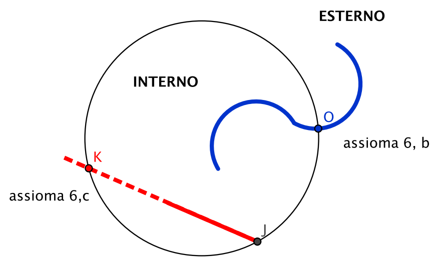


Tracciamo un segmento congiungente A e C e uno congiungente B e C [assioma 1].



Ora poiché B e C appartengono alla stessa circonferenza di centro A, AC è uguale ad AB. [definizione di circonferenza e centro]
Analogamente, poiché A e C appartengono alla stessa circonferenza di centro B, BC è uguale ad AB. [definizione di circonferenza e centro]
Poiché cose che sono uguali alla stessa cosa sono uguali tra di loro, allora AC è anche uguale a BD. [nozioni comuni]
Quindi i tre segmenti AB, AC e BC sono uguali tra loro. Il triangolo ABC è quindi equilatero (avendo i tre lati uguali), ed ha per lato AB. QED

Ecco l'assioma che assicura che le due circonferenze nella dim. della Prop. 1 si intersechino:
Assioma 6: *a) un cerchio (rispettivamente, un triangolo) separa i punti del piano che non sono contenuti in esso in due regioni, che vengono chiamate* ***interno*** *ed* ***esterno****.*
b) Ogni linea tracciata da un punto esterno ad un punto interno interseca il cerchio (risp., il triangolo)
c) Ogni segmento tracciato da un punto sul cerchio (o su un triangolo) ad un punto interno, incontrerà, se prolungato indefinitamente, il cerchio (risp., il triangolo) esattamente in un altro punto



Si osservi che il postulato 3 fornisce la possibilità di utilizzare il compasso per disegnare una circonferenza, ma la sua formulazione non permette di utilizzarlo per misurare la lunghezza di un segmento: l'assioma non assicura di poter mantenere l'apertura del compasso quando lo si solleva dal foglio. Tale possibilità viene però garantita attraverso le proposizioni 2 e 3

Proposizione I.2
Dati un segmento e un punto, costruire un segmento che uguale al segmento assegnato e che abbia per estremo il punto dato.

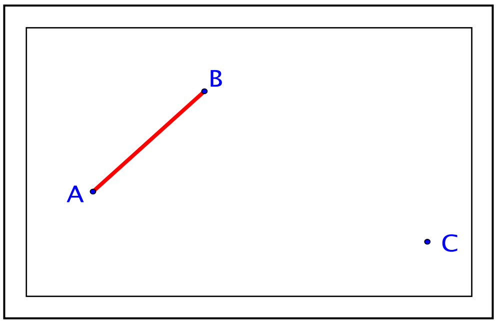
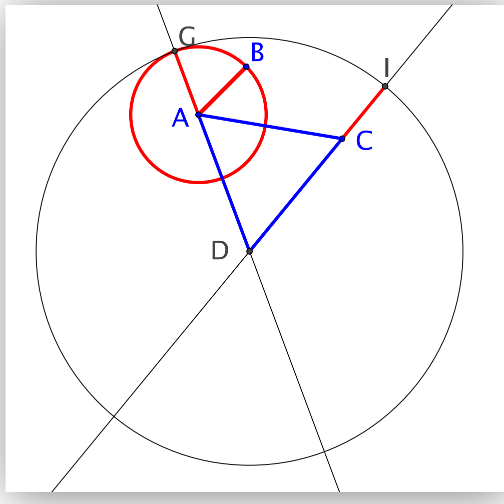


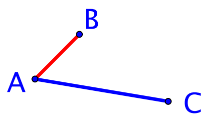
Figura iniziale



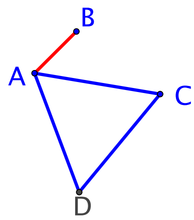
Costruzione

Siano AB il segmento e C il punto assegnati. È richiesto di costruire a partire dal punto C un segmento uguale a AB.

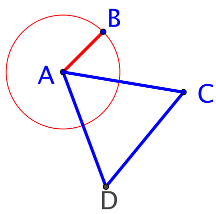
Disegniamo il segmento AC [assioma 1]



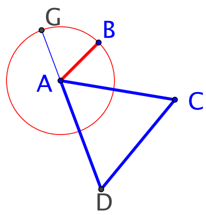
Disegniamo un triangolo equilatero di lato AC [in blu, prop. 1] e chiamiamo D il vertice diverso da A e C.



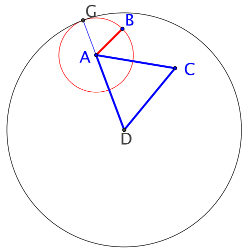
Disegniamo la circonferenza di centro A e raggio AB [assioma 3]



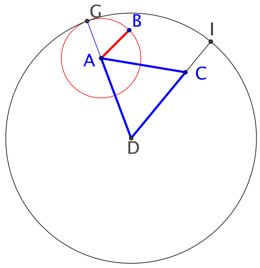
Prolunghiamo DA (a partire da A) [assioma 2] fino ad incontrare in G la circonferenza (rossa) di centro A e raggio AB [assioma 6] Siccome il punto A è il centro del cerchio, AB è uguale a AG [definizione di cerchio].



Disegniamo la circonferenza di centro D e raggio DG [assioma 3]



Prolunghiamo DC (a partire da C) [assioma 2] fino ad incontrare in I la circonferenza (nera) di centro D e raggio DG [assioma 6]



Siccome D è il centro del cerchio, DG è uguale a DI [definizione di cerchio].
Ma DG = DA+AG e DI = DC+CI, e dunque

$$DA+AG = DC+CI.$$

Osserviamo che DA è uguale a DC [perché lati del triangolo ADC che è equilatero per costruzione].
Per le nozioni comuni anche la parte restante AG risulta uguale a CI.
Dunque, CI è uguale a AG, che a sua volta è uguale a AB. Per le nozioni comuni, segue che CI è uguale a AB.
QED

Per comodità di lettura, raccogliamo altri assiomi da aggiungere a quelli iniziali di Euclide. Questi assiomi sono solo una parte di quelli veramente necessari.

Assioma 7
a) Una retta (che si estende in modo indefinito in entrambe le direzioni) separa i punti del piano non appartenenti ad essa in due regioni dette ***semipiani****.*
b) Ogni linea, tracciata da un punto in un semipiano in un punto nell'altro semipiano, incontra la retta.
Assioma 8 *(LAL: Lato-Angolo-Lato) (sostituisce la Proposizione I.4)*
Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, allora sono congruenti.
Assioma 9 *Triangoli congruenti hanno aree uguali.*

Proposizione I.3
Possiamo togliere da un segmento più lungo un segmento più breve.

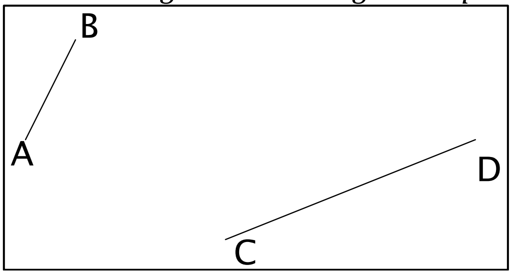
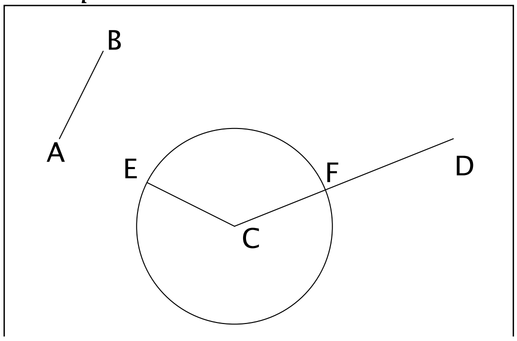


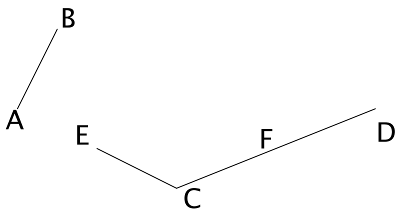
figura iniziale



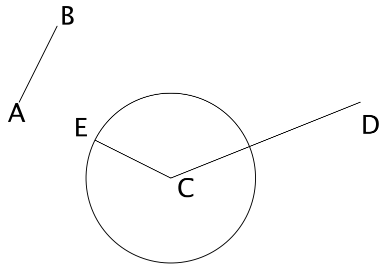
costruzione

Siano AB e CD due segmenti di differente lunghezza, e CD sia il più lungo.
Si chiede di togliere dal segmento più lungo CD un segmento uguale al più piccolo AB.

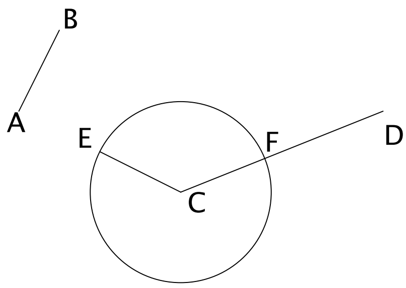
Costruiamo CE a partire da C uguale alla linea retta AB. [prop I.2]



Disegniamo il cerchio con centro C e raggio CE [assioma 3]



Per l'assioma 6 il segmento CD e il cerchio disegnato si intersecano in un punto, che chiamiamo F [assioma 6]



Ora, siccome il punto C è il centro del cerchio EF, CE e' uguale a CF. [def. di cerchio]
Ma AB è anche uguale a CE, e dunque CF anche e' uguale a AB. [nozioni comuni]
Dunque, dati due segmenti AB < CD, CF uguale ad AB è stata tolto da CD.

QED