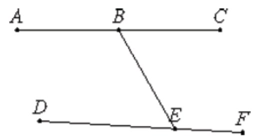
Una teoria assiomatica per la geometria piana: Elementi di Euclide - Libro I

(testo di riferimento: L.Russo, G.Pirro, E.Salciccia, Euclide: il I libro degli Elementi, Carocci Editore, collana Frecce)

Il libro I degli Elementi di Euclide costituisce una presentazione assiomatico-deduttiva della geometria del piano (non del tutto completa).
In esso sono presentate 23 definizioni (nelle quali non vengono distinti termini primitivi e definizioni nel senso moderno del termine), alcune regole della logica aristotelica e cinque postulati. A partire da essi, Euclide discute teoremi di geometria piana relativi principalmente ai triangoli. Una osservazione successiva e recente ha permesso di notare che gli assiomi euclidei vanno integrati con ulteriori assiomi. Inoltre, non è accertato che la versione riportata sia quella autentica di Euclide, o includa revisioni successive e interventi di altri autori. Le parti riportate **contengono variazioni** rispetto alla traduzione del testo originale, nel tentativo di avvicinare la terminologia a quella attualmente in uso, e di segnalare i termini cui ora vengono attribuiti significati differenti.
Definizioni
1) Un ***punto*** è ciò che non ha parti
2) Una ***linea*** è una lunghezza senza larghezza
3) Gli ***estremi di una linea*** sono punti
4) Un ***segmento*** (linea retta) è una linea che giace ugualmente rispetto ai suoi punti
5) Una ***superficie*** ha solo lunghezza e larghezza
6) Le estremità di una superficie sono linee
7) Una ***superficie piana*** è una superficie che giace ugualmente rispetto alle sue rette
8) Un ***angolo*** piano è l'inclinazione fra due linee in un piano che si incontrano e non giacciono su uno stesso segmento
9) e quando le linee che si incontrano sono rette l'**angolo** è detto **rettilineo**
10) Quando un segmento, innalzato a partire da un altro segmento, forma due angoli adiacenti uguali, ognuno di quegli angoli è ***retto*** e il segmento che sta sull'altro è detto ***perpendicolare***
11) Un ***angolo ottuso*** è un angolo più grande di un angolo retto
12) Un ***angolo acuto*** è un angolo più piccolo di un angolo retto
13) Un ***contorno*** è l'estremità di qualcosa
14) Una ***figura*** è ciò che è contenuta da un contorno
15) Un ***cerchio*** è una figura piana contenuta da una linea tale che tutte le linee rette che vanno su essa da un punto interno alla figura sono uguali tra di loro
16) e il punto è detto ***centro*** del cerchio
17) Un ***diametro*** del cerchio e una linea retta tracciata dal centro e che termina in entrambe le direzioni sulla circonferenza del cerchio, e questa linea retta biseca il cerchio
18) Un ***semicerchio*** è la figura contenuta dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata, e il centro del semicerchio è lo stesso del centro del cerchio
19) Figure rettilinee sono quelle contenute da linee rette, figure trilaterali (***triangoli***) sono quelle contenute da tre, quadrilaterali da quattro, e multilaterali quelle contenute da più di quattro linee rette
20) Delle figure trilaterali, un ***triangolo equilatero*** è quello che ha tre lati uguali, un triangolo isoscele è quello che ha due lati uguali e un triangolo scaleno è quello che ha i tre lati diseguali
21) inoltre delle figure trilaterali un ***triangolo rettangolo*** è quello che ha un angolo retto, un ***triangolo ottusangolo*** quello che ha un angolo ottuso e un ***triangolo acutangolo*** uno che ha i tre angoli acuti
22) Delle figure quadrilaterali, un ***quadrato*** è quello che ha sia i lati uguali che gli angoli retti, un ***rettangolo*** quello che ha gli angoli retti ma non i lati tutti uguali, un ***rombo*** è quello equilatero ma non con gli angoli retti, un ***trapezio*** quello che ha i lati e gli angoli opposti uguali a due a due ma non è equilatero e non ha angoli retti.
23) linee rette parallele sono linee rette che, essendo nello stesso piano e prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni, non si incontrano in nessuna delle due direzioni

Postulati (o assiomi):

1) È possibile disegnare un segmento tra due punti
2) È possibile prolungare un segmento
3) È possibile disegnare una circonferenza con dato raggio e dato centro
4) Tutti gli angoli retti sono uguali
5) Se una linea retta che cade su due linee rette forma angoli interni dalla stessa parte minori di due angoli retti, allora le due rette, se prolungate indefinitamente, si incontreranno dalla parte in cui gli angoli interni sono minori di due angoli retti



Se dunque la somma degli angoli ABE e BED è minore di due angoli retti, le rette AC e DF, prolungate dalla parte di A e D, si incontreranno.

Nozioni comuni (o regole di logica)

1) Cose uguali alla stessa cosa sono uguali tra loro
2) Cose uguali sommate a cose uguali danno somme uguali
3) Cose uguali sottratte a cose uguali danno differenze uguali
4) Cose coincidenti sono uguali
5) L'intero è maggiore della sua parte

A partire dalle 23 definizioni, dalle regole della logica aristotelica e dai cinque postulati, Euclide discute alcuni risultati di geometria piana relativi principalmente ai triangoli: ogni proposizione è dimostrata attraverso costruzioni garantite dagli assiomi iniziali, dalle proposizioni precedenti e dalle regole logiche. Una osservazione successiva ha permesso di notare che gli assiomi euclidei vanno integrati con ulteriori assiomi (alcuni dei quali verranno riportati all'interno della trattazione).

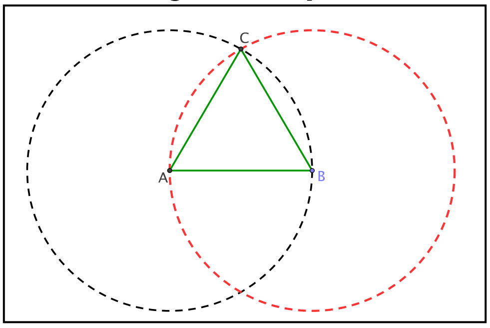
2.4 Le proposizioni del Primo Libro degli Elementi di Euclide

Per facilitare la lettura delle proposizioni, apporteremo alcune variazioni al testo, cercando però di salvarne lo spirito.

Queste note vanno intese come tramite verso la lettura del testo euclideo, e non si sostituiscono ad esso.

Proposizione I.1

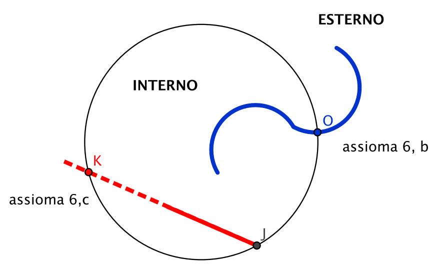
Fissato un segmento, è possibile costruire un triangolo equilatero di cui quel segmento è un lato.



Dimostrazione Sia AB il segmento assegnato. E' richiesto di costruire un triangolo equilatero sul segmento AB.
Tracciamo la circonferenza di centro A e raggio AB [assioma 3].
Poi tracciamo la circonferenze di centro B e raggio BA [assioma 3].
Scegliamo un punto D in cui i cerchi si intersecano [*questo passaggio non è lecito senza un ulteriore assioma: è l'assioma 6*]
Tracciamo un segmento congiungente Ae C e uno congiungente B e C [assioma 1].
Ora poiché B e C appartengono alla stessa circonferenza di centro A, AC e' uguale ad AB. [definizione di circonferenza e centro]
Analogamente, poiché A e C appartengono alla stessa circonferenza di centro B, BC è uguale ad AB. [definizione di circonferenza e centro]
Poiché cose che sono uguali alla stessa cosa sono uguali tra di loro, allora AC è anche uguale a BD. [nozioni comuni]
Quindi i tre segmenti AB, AC e BC sono uguali tra loro. Il triangolo ABC è quindi equilatero (avendo i tre lati uguali), ed ha per lato AB. QED

Ecco l'assioma che assicura che le due circonferenze nella dim. della Prop. 1 si intersechino:

Assioma 6: *a) un cerchio (rispettivamente, un triangolo) separa i punti del piano che non sono contenuti in esso in due regioni, che vengono chiamate* ***interno*** *ed* ***esterno****.*
b) Ogni linea tracciata da un punto esterno ad un punto interno interseca il cerchio (risp., il triangolo)
c) Ogni segmento tracciato da un punto sul cerchio (o su un triangolo) ad un punto interno, incontrerà, se prolungato indefinitamente, il cerchio (risp., il triangolo) esattamente in un altro punto



Proposizione I.2

Dati un segmento e un punto, costruire un segmento che uguale al segmento assegnato e che abbia per estremo il punto dato.

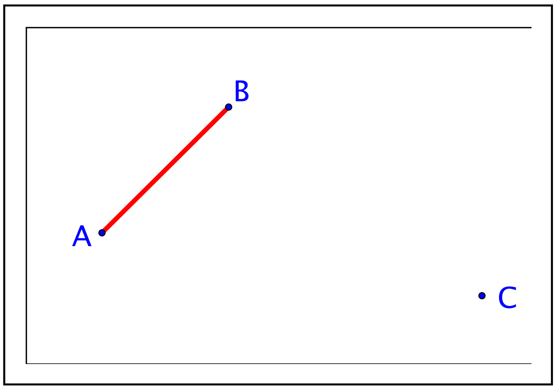
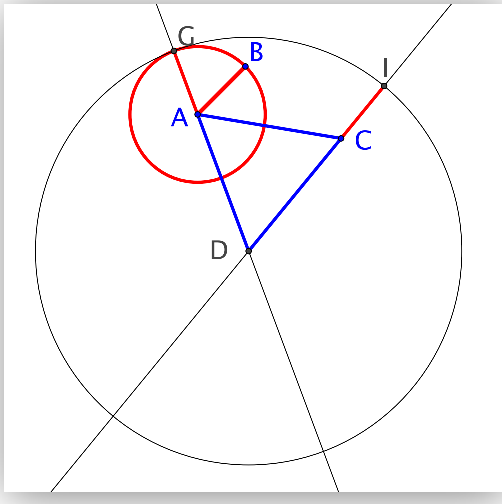


Figura iniziale



Costruzione

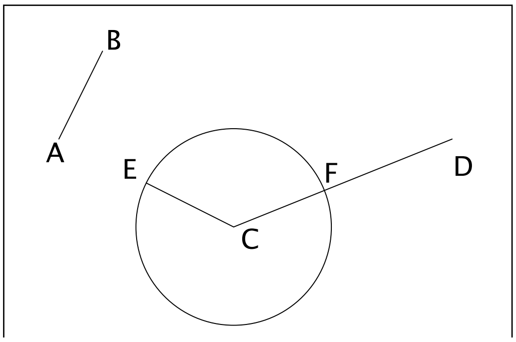
Siano AB il segmento e C il punto assegnati. È richiesto di costruire a partire dal punto C un segmento uguale a AB.
Disegniamo il segmento AC [assioma 1]
Disegniamo un triangolo equilatero di lato AC [in blu, prop. 1] e chiamiamo D il vertice diverso da A e C.
Disegniamo la circonferenza di centro A e raggio AB [assioma 3]
Prolunghiamo DA (a partire da A) [assioma 2] fino ad incontrare in G la circonferenza (rossa) di centro A e raggio AB [assioma 6]
Siccome il punto A è il centro del cerchio, AB è uguale a AG [definizione di cerchio].
Disegniamo la circonferenza di centro D e raggio DG [assioma 3]
Prolunghiamo DC (a partire da C) [assioma 2] fino ad incontrare in I la circonferenza (nera) di centro D e raggio DG [assioma 6]
Siccome D è il centro del cerchio, DG è uguale a DI[definizione di cerchio]. Inoltre DA è uguale a DC [perché lati del triangolo ADC che è equilatero per costruzione].
Poiché DG (= DA+AG) = DI = (DC+CI), per le nozioni comuni anche la parte restante AG risulta uguale a CI. Dunque, CI è uguale a AG, che a sua volta è uguale a AB. Per le nozioni comuni, segue che CI è uguale a AB. QED

Si osservi che il postulato 3 fornisce la possibilità di utilizzare il compasso per disegnare una circonferenza, ma la sua formulazione non permette di utilizzarlo per misurare la lunghezza di un segmento: l'assioma non assicura di poter mantenere l'apertura del compasso quando lo si solleva dal foglio. Tale possibilità viene però garantita attraverso le proposizioni 2 e 3.

Per comodità di lettura, raccogliamo altri assiomi da aggiungere a quelli iniziali di Euclide. Questi assiomi sono solo una parte di quelli veramente necessari.

Assioma 7
a) Una retta (che si estende in modo indefinito in entrambe le direzioni) separa i punti del piano non appartenenti ad essa in due regioni dette ***semipiani****.*
b) Ogni linea, tracciata da un punto in un semipiano in un punto nell'altro semipiano, incontra la retta.
Assioma 8 *(LAL: Lato-Angolo-Lato) (sostituisce la Proposizione I.4)*
Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, allora sono congruenti.
Assioma 9 *Triangoli congruenti hanno aree uguali.*

Proposizione I.3
Possiamo togliere da un segmento più lungo un segmento più breve.



costruzione

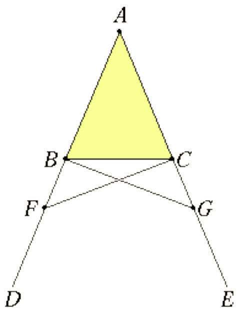
Siano AB e CD due segmenti di differente lunghezza, e CD sia il più lungo.
Si chiede di togliere dal segmento più lungo CD un segmento uguale al più piccolo AB. Costruiamo CE a partire da C uguale alla linea retta AB, [prop I.2]
e descriviamo il cerchio con centro C e raggio CE [assioma 3]
Chiamiamo F l'intersezione tra il cerchio disegnato e il segmento CD [assioma 6]
Ora, siccome il punto C è il centro del cerchio EF, CE e' uguale a CF. [def. di cerchio]
Ma AB è anche uguale a CE, e dunque CF anche e' uguale a AB.[nozioni comuni]
Dunque, dati due segmenti AB e CD, CF uguale al minore AB è stata tolto da CD che è il maggiore. QED

Le due proposizioni seguenti mostrano che un triangolo ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali.

Proposizione I.5

In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali e, se prolunghiamo i lati uguali, gli angoli sotto la base sono uguali.

Dimostrazione



Consideriamo un triangolo isoscele (I.Def.20) ABC con il lato AB uguale al lato AC. Prolunghiamo il lato AB a partire da B con BD e prolunghiamo il lato AC a partire da C con CE (post. I.2).
Vogliamo mostrare che gli angoli ABC e ACB sono uguali e che anche gli angoli CBD e BCE sono uguali tra loro.

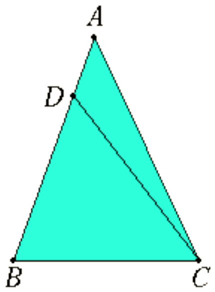
Fissiamo un punto F su BD. Su AE, o su un suo prolungamento, prendiamo un punto G tale che AG sia lungo come AF [prop. I.3].
Congiungiamo B con G e C con F (post. I.1)
Consideriamo i triangoli AFC e ABG: essi hanno uguali i lati AF e AG, come anche i lati AC e AB. Inoltre, hanno in comune l'angolo FAG, compreso tra i lati uguali. I due triangoli sono dunque congruenti per LAL. In particolare FC e BG sono uguali, gli angoli FCA e GBA coincidono e gli angoli AFC e BGA coincidono.
Ora consideriamo i triangoli BFC e BGC.
Poiché AF è uguale ad AG e AB è uguale ad AC, per differenza BF è uguale a CG (NC.3).
Inoltre i due triangoli hanno uguali i lati FC e BG e gli angoli BFC e BGC per quanto visto. Dunque i due triangoli sono congruenti per LAL. In particolare, l'angolo CBF è uguale all'angolo BCG (che era uno dei risultati che volevamo dimostrare).
Abbiamo provato che gli angoli ABG e ACF sono uguali tra loro e gli angoli CBG e BCF sono uguali tra loro; possiamo quindi concludere che l'angolo ABC (ottenuto da ABG sottraendo CBG)è uguale all'angolo ACB (ottenuto da ACF sottraendo BCF) (C.N.3). QED

La successiva proposizione è l'inversa della n.5.

Proposizione I.6

Se un triangolo ha due angoli uguali, allora i lati opposti agli angoli uguali sono uguali.

Dimostrazione



Sia ABC un triangolo nel quale l'angolo ABC è uguale all'angolo ACB. Dobbiamo mostrare che i lati AB e AC sono uguali.
Procediamo per assurdo. Se AB e AC non sono uguali, uno di essi è maggiore dell'altro (C.N.).
Dunque AB è maggiore o minore di AC.
Si osservi che questa deduzione si basa su una legge non elencata nelle nozioni comuni: è detta legge di tricotomiae afferma che 'date due quantità omogenee AB e AC, allora AB>AC, oppure AB=AC oppure AB<AC '.

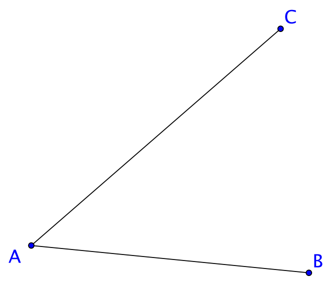
Supponiamo che AB sia maggiore di AC. Nel segmento AB, fissiamo il punto D tale che BD sia uguale a AC (I.3) ;
tracciamo il segmento DC (I. Post. I).
Consideriamo i triangoli DBC e ACB: in essi BD=AB per costruzione, BC in comune, angolo in B in comune. Per LAL, i due triangoli sono quindi congruenti.
Per l'assioma 9, i due triangoli hanno aree uguali. Ma il triangolo BCD è strettamente contenuto in BCA, e ha dunque un'area strettamente minore. Assurdo: qundi non è possibile che AB sia maggiore di AC.
Supponiamo che AB sia minore di AC. (*completare per esercizio la dimostrazione)* .... QED

Proposizione I.9

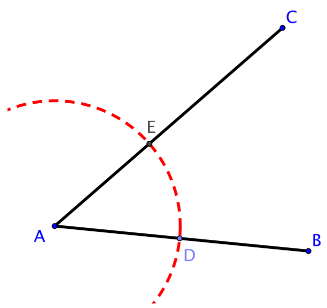
E' possibile dividere in due parti uguali un qualsiasi angolo (rettilineo) assegnato (diremo che è possibile bisecare l'angolo).

Dimostrazione

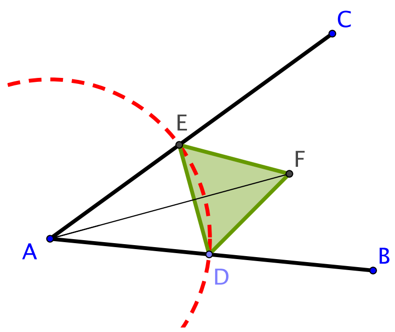
Sia BAC un angolo rettilineo assegnato.



Si fissi un punto D su AB, e un punto E su AC in modo tale che AD=AE [I.3]

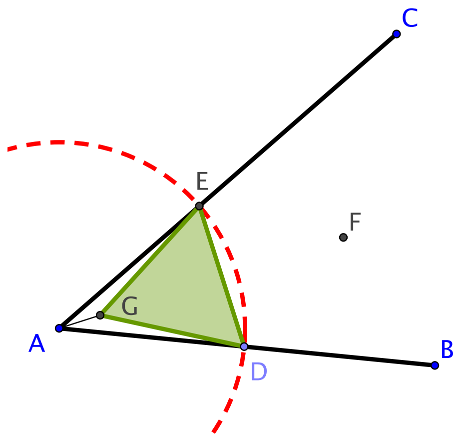


Si congiunga D con E [post. 1] e si costruisca un triangolo equilatero DEF di lato DE [I.1] Si congiunga A con F [post . 1]

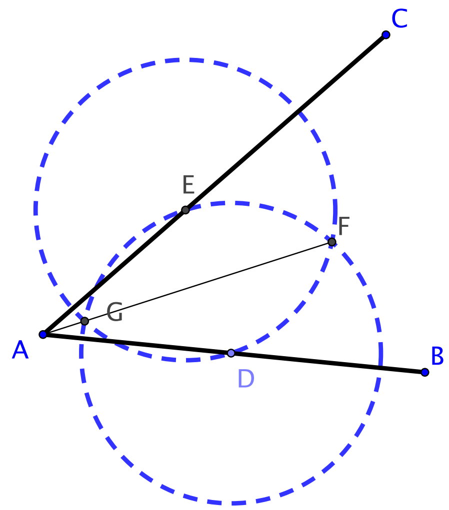


Dimostriamo ora che AF divide a metà l'angolo BAE, cioè BAF = FAE.
Consideriamo il triangolo AED: in esso, AE=AD per costruzione. Per la prop. I.5, gli angoli alla base AED e ADE sono uguali. Analogamente, poiché il triangolo DFE è equilatero (e quindi EF=FD), l'angolo EFD è uguale all'angolo FDE.
Supponiamo che il triangolo equilatero sia disposto come in figura. Poiché, per le nozioni comuni, sommando cose uguali si ottengono cose uguali tra loro, l'angolo AEF=AED+DEF risulta uguale all'angolo ADF= ADE+EDF.
Consideriamo ora i triangoli AFE e ADF. In essi, AE=AD per costruzione, AF è in comune.
Inoltre l'angolo AEF compreso tra AE e EF coincide con l'angolo ADF compreso tra AD e DF (come appena dimostrato). Per l'assioma LAL, concludiamo che i triangoli AFE e ADF sono congruenti. In particolare, ricaviamo che l'angolo EAF è uguale all'angolo FAD (come volevamo.
[osserviamo, inoltre, che l'angolo EFA è uguale all'angolo AFD: dunque, il segmento AF risulta bisettrice anche dell'angolo EFD del triangolo equilatero.] Q.E.D.

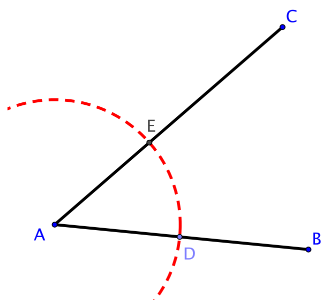
Esercizio 1. Completa la dimostrazione nel caso il triangolo equilatero sia disposto come nella figura.



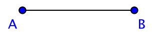
Esercizio 2. Dimostra che i punti A, G, F sono allineati, cioè i segmenti AG e AF sono uno contenuto nell'altro.



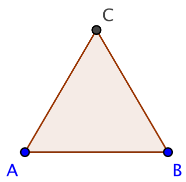
Esercizio 3. Dividi l’angolo in figura in 4 e in 8 parti uguali.

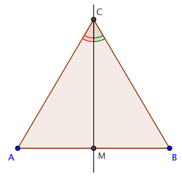


Proposizione I.10
E' possibile dividere in due parti uguali un qualsiasi segmento assegnato
Dimostrazione

Sia assegnato un segmento AB. 

Vogliamo costruire il punto medio M (cioè il punto M appartenente al segmento e tale che AM=MB)

Costruiamo un triangolo equilatero ABC di lato AB (prop. I.1): 

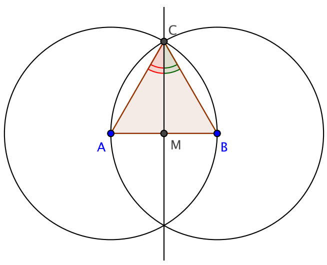
e bisechiamo l'angolo in C (prop. I.9) : 

Chiamiamo M il punto di intersezione tra il segmento AB (o un suo prolungamento) e la retta che biseca l'angolo C.
Mostriamo che M divide il segmento AB in due parti uguali: consideriamo i triangoli AMC e MBC; essi hanno il lato MC in comune, gli angoli MCB=MCA congruenti per costruzione della bisettrice, e i lati AC=BC per definizione di triangolo equilatero. Ad essi possiamo quindi applicare il criterio di congruenza LAL, mostrando che AMC e MBC sono triangoli congruenti.
Da tale congruenza segue che:

AM=MB ,
l'angolo in A è uguale all'angolo in B (ma lo sapevamo già per la prop. I.5)
l'angolo AMC è uguale all'angolo CMB.

In particolare, AM=MB e abbiamo diviso AB in due parti uguali. Q.E.D.

Esercizio 1. Mostra che, per dividere a metà il segmento AB, è sufficiente tracciare due cerchi di raggio AB (uno con centro A e l'altro con centro B) e tracciare la retta che congiunge i punti di intersezione tra questi due cerchi: tale retta divide in due parti uguali il segmento AB.



Esercizio 2. Dividi il segmento AB in 4 e in 8 parti uguali.