1 Rappresentazione decimale dei numeri razionali.

Dopo aver introdotto il campo dei numeri razionali come ampliamento dell'anello $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, e aver visto che ogni numero razionale è una classe di equivalenza, possiamo porre:

$$[(a,b)] = [(ka,kb)] =_{def} \frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}, \; k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

ricordando che la frazione $\frac{a}{b}$, come pure la frazione $\frac{ka}{kb}$, è un elemento della classe di equivalenza e come tale deve essere considerato.

Inoltre sappiamo che si può scegliere come rappresentante della classe una qualsiasi coppia (frazione) appartenente alla classe stessa e quindi possiamo scegliere una coppia (frazione) privilegiata, cioè un "rappresentante canonico" della classe.

Usualmente viene scelta come rappresentante la frazione $\frac{a}{b}$ in cui $MCD(a,b) = 1$ e questa è conosciuta come la frazione "ridotta ai minimi termini".

Ad esempio: $[(4,9)] = [(4k,9k)]$ puó essere rappresentata dalle frazioni $\frac{4}{9} = \frac{k4}{k9} = \frac{-4}{-9} = \frac{12}{27} = \ldots$

1.0.1 Quando una rappresentazione decimale è limitata?

Consideriamo le seguenti frazioni e il loro sviluppo decimale:

1) $\frac{2}{5} = 0,4;$

2) $\frac{3}{16} = 0,1875;$

3) $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}.$

Vediamo che nei primi due casi si tratta di numeri decimali limitati e nel terzo caso no.
Il motivo, come si sa, è dovuto alle caratteristiche del denominatore. Si ha infatti il seguente:

Teorema 1 *Dato il numero razionale* $\frac{a}{b}$, *con* $0 < a < b$ *e* $MCD(a,b) = 1$, *esso ammette una rappresentazione decimale limitata se e solo se* $\frac{a}{b}$ *è equivalente ad una frazione decimale , cioè se e solo se* b *è un divisore di* 10^k, *per un opportuno* $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$ [1].

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $\frac{a}{b}$ ammetta una rappresentazione decimale limitata, cioè sia:

$$\frac{a}{b} = 0, c_1 c_2 \ldots c_n = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \cdots + \frac{c_c}{10^n};$$

eseguendo la somma si ottiene la tesi:

$$\frac{c_1 \cdot 10^{n-1} + c_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + c_n}{10^n}.$$

Viceversa supponiamo che $\frac{a}{b} = \frac{d}{10^k}$ con $0 < a < b$ e quindi $0 < \frac{a}{b} < 1$.
Scriviamo d in forma polinomiale, cioè $d = d_n \cdot 10^n + d_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + d_0$. Poiché $0 < \frac{a}{b} < 1$ si ha $n < k$ e, sostituendo, otteniamo:

$$\frac{d}{10^k} = \frac{d_n \cdot 10^n + d_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + d_0}{10^k} = \frac{d_n \cdot 10^n}{10^k} + \frac{d_{n-1} \cdot 10^{n-1}}{10^k} + \cdots + \frac{d_0}{10^k}.$$

Abbiamo così ottenuto la scrittura decimale limitata, come si voleva.
■

[1] cioè se e solo se $b = 2^\alpha \cdot 5^\beta$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Esempio 2 *Utilizzando il procedimento dimostrativo del precedente teorema, mostrare che* $\frac{3}{16}$ *ammette una scrittura decimale limitata.*

Soluzione

$\frac{3}{16} = \frac{1875}{10.000} = \frac{1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5}{10^4} = \frac{1 \cdot 10^3}{10^4} + \frac{8 \cdot 10^2}{10^4} + \frac{7 \cdot 10^1}{10^4} + \frac{5}{10^4} =$
$= \frac{1}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{7}{10} + 1 = 0,1875.$

Osservazione 1.
Poich'e $\frac{a}{b} \sim \frac{d}{10^k} \Leftrightarrow a \cdot 10^k = b \cdot d$. si conclude che $b \mid 10^n$, essendo per ipotesi $MCD(a, b) = 1$.

Osservazione 2.
Se $b \neq 2^\alpha 5^\beta$ cioè se esiste un primo $p \notin \{2,\ 5\}$ tale che $p \mid b$, il numero $\frac{a}{b}$ (con $MCD(a, b) = 1$ non ha una rappresentazione decimale limitata.

Esempio 3 $\frac{2}{3} = 0,666666 \cdots = 0,\overline{6}$;
$\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$;
$\frac{3}{8} = 0,375$.

1.1 Alcune informazioni sulle cifre del periodo e dell'antiperiodo

Abbiamo visto che il periodo di $\frac{4}{7}$ è 6 ed è ancora 6 il periodo di $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, di $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$, di $\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}$, di $\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$, di $\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$, di $\frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$.

Teorema 4 *Sia* $\frac{a}{b}$ *con* $0 < a < b$*, un numero razionale non equivalente ad una frazione decimale. Allora* $\frac{a}{b}$ *ha una rappresentazione decimale illimitata e periodica, con periodo al piú* $b - 1$.

Dimostrazione. Sia $\frac{a}{b}$ con $0 < a < b$, un numero razionale non equivalente ad una frazione decimale. Mostriamo che esso ammette un periodo limitato, di lunghezza $\leq b - 1$. Consideriamo le seguenti divisioni (a e b sono numeri interi):

$$\begin{aligned}
a &= \underline{q_0} \cdot b + r_0 \\
r_0 \cdot 10 &= \underline{r_0} \cdot b + r_1 \\
r_1 \cdot 10 &= \underline{q_2} \cdot b + r_2 \\
r_2 \cdot 10 &= \underline{q_3} \cdot b + r_3 \\
\ldots &= \ldots\ldots \\
r_{h-1} \cdot 10 &= \underline{q_h} \cdot b + r_h \\
r_h \cdot 10 &= \underline{q_{h+1}} \cdot b + r_{h+1} \\
\ldots &= \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Per le proprietà di quoziente e resto in $\mathbb{Z}$, si ha che $0 \leq r_i < b$, $\forall i$, anzi $r_i \neq 0$ perchè b non è un divisore di 10^k per ipotesi.
I resti r_i possono soltanto assumere i valori compresi tra 1 e $b-1$. Quindi dopo al più $b-1$ passi tali valori si ripeteranno e si ripeteranno anche i valori $r_i \cdot 10$. Quindi dopo la prima ripetizione dei resti si presenteranno anche i quozienti ripetuti nello stesso ordine, dando origine al "periodo". Avremo: $\frac{a}{b} = 0, q_1 q_2 q_1 q_3 \ldots q_t\ q_1 q_2 q_1 q_3 \ldots q_t\ q_1 q_2 q_1 q_3 \ldots q_t \ldots$ ■

Esempio 5 *Calcoliamo* $\frac{4}{7}$ *usando la procedura utilizzata nella dimostrazione del teorema precedente (che è il solito algoritmo della divisione).*

$$\begin{aligned}
4 &= 7 \cdot \underline{0} + 4 \\
4 \cdot 10 &= 7 \cdot \underline{5} + 5 \\
5 \cdot 10 &= 7 \cdot \underline{7} + 1 \\
1 \cdot 10 &= 7 \cdot \underline{1} + 3 \\
3 \cdot 10 &= 7 \cdot \underline{4} + 2
\end{aligned}$$

$$2 \cdot 10 = 7 \cdot \underline{2} + 6$$
$$6 \cdot 10 = 7 \cdot \underline{8} + 4$$

Otteniamo $0,\overline{571428}$.

Definizione 6 *Dato un numero razionale* $\frac{a}{b}$*, si dice gaussiano di* b *e lo si indica con* $g(b)$ *il numero di cifre del periodo, se* $MCD(a,b) = 1$.

Proprietà: Il valore del gaussiano $g(b)$ dipende esclusivamente da denominatore b quando la frazione è ridotta ai minimi termini, cioè se $MCD(a,b) = 1$ e $MCD(c,b) = 1$, le due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$ hanno lo stesso numero di cifre del periodo.
Non è tuttora noto un algoritmo che consenta di calcolare il gaussiano per **ogni** numero razionale (naturalmente se un numero è intero o decimale la risposta esiste).
Vedremo in seguito qualche condizione sufficiente[2].

Esercizio 7 *Verificare che le frazioni proprie con denominatore* 11 *hanno il periodo di due cifre.*

Si puó dimostrare che, dato il numero razionale $\frac{a}{b}$, con $0 < a < b$ e $MCD(a,b) = 1$:

1) se $MCD(b, 10) = 1$ il primo resto che si ripete è proprio r_0 e quindi non c'è antiperiodo;

2) se $2 \mid b$ oppure $5 \mid b$ allora cè antiperiodo; (ad esempio $\frac{3}{14} = 0,2\overline{142857}$)

3) le cifre dell'antiperiodo sono k, ove $k = max(exp(2), exp(5))$ nella fattorizzazione di b. Precisamente, se $b = 2^{\alpha_1} 5^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_n^{\alpha_n}$, k è il valore massimo tra gli esponenti di 2 e di 5 ($k = max(\alpha_1, \alpha_2)$).

Ad esempio $\frac{1}{72}$ avrà 3 cifre nell'antiperiodo in quanto $72 = 2^3 \cdot 5^0 \cdot 3^2$ e $3 = max(3, 0)$.

Teorema 8 *Si puó dimostrare che se il denominatore è un numero primo* p*, il gaussiano* $g(p)$ *è un divisore di* $p - 1$.

Definizione 9 *Dato un intero positivo* n *si definisce* $\varphi(n)$ *(* φ *funzione di Eulero) il numero dei numeri compresi tra* 1 *ed* n *e primi con* n.

In generale si può dimostrare:

Teorema 10 *Data* $\frac{a}{b}$*, con* $MCD(a,b) = 1$ *si ha che* $g(b)$ *è un divisore di* $\varphi(b)$.

Esercizio 11 *Calcolare la funzione di Eulero dei seguenti numeri:*
4, 5, 7, 8, 10, 11, 13.

Svolgimento Poiché i numeri positivi primi con 4 e minori di 4 sono 1, 3, si conclude che $\varphi(4) = 2$.

I numeri positivi primi con 8 e minori di 8 sono 1, 3, 5, 7, e quindi si conclude che $\varphi(8) = 4$.

Analogamente i numeri positivi primi con 10 e minori di 10 sono 1, 3, 7, 9, e quindi si conclude ancora che $\varphi(10) = 4$.

Analogamente i numeri positivi primi con 5 e minori di 5 sono 1, 2, 3, 4, e quindi si conclude che $\varphi(5) = 4$.

Analogamente i numeri positivi primi con 7 e minori di 7 sono 1, 2, 3, 4, 5, 6,, e quindi si conclude che $\varphi(7) = 6$.

In generale se p è un numero primo, segue che $\varphi(p) = p - 1$.

[2] In particolare, nel caso in cui $b = p$ numero primo, g(p) è un divisore di $p - 1$.

1.2 Frazione generatrice di un numero decimale periodico

Vediamo ora di risalire al numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{a}{b}$ (non necessariamente con $MCD(a,b)=1$), quando si abbia un numero decimale finito o periodico.
Sia

$$a = q, c_1c_2\dots c_n\overline{p_1p_2\dots p_m} \qquad (\star)$$

un numero razionale ove q è la parte intera e quindi $q = i_1i_2\dots i_t$, mentre $c_1c_2\dots c_n$ sono le cifre dell'antiperiodo e $p_1p_2\dots p_m$ sono le cifre del periodo.

Moltiplichiamo entrambi i membri della $(\star)$ per 10^n ove n è il numero delle cifre dell'antiperiodo. Otteniamo:

$$10^n \cdot a = i_1i_2\dots i_tc_1c_2\dots c_n, \overline{p_1p_2\dots p_m}. \qquad (\star\star)$$

Ora moltiplichiamo entrambi i membri della $(\star)$ per 10^{n+m} ove m è il numero delle cifre del periodo. Otteniamo:

$$10^{n+m}n \cdot a = i_1i_2\dots i_tc_1c_2\dots c_np_1p_2\dots p_m, \overline{p_1p_2\dots p_m}. \qquad (\star\star\star)$$

Ora sottraiamo membro a membro la $(\star\star)$ dalla $(\star\star\star)$ e otteniamo:

$$10^{n+m}\cdot a - 10^n \cdot a = (10^{n+m} - 10^n)\cdot a = i_1i_2\dots i_tc_1c_2\dots c_np_1p_2\dots p_m - i_1i_2\dots i_tc_1c_2\dots c_n.$$

Ora ricaviamo a:

$$a = \frac{i_1i_2\dots i_tc_1c_2\dots c_np_1p_2\dots p_m - i_1i_2\dots i_tc_1c_2\dots c_n}{(10^{n+m} - 10^n)}$$

che è la nota formula in quanto basta osservare che il denominatore diventa:

$$(10^{n+m} - 10^n) = 10^n(10^m - 1) = \underbrace{99\dots9}_{m \text{ volte}}\,\underbrace{00\dots0}_{n \text{ volte}}.$$

Esercizio Utilizzando il procedimento descritto sopra, trovare la frazione generatrice di $4,123\overline{45}$.

Soluzione

Poniamo

$$a = 4,123\overline{45} \qquad (\diamond)$$

e moltiplichiamo la $(\diamond)$ prima per 10^3 e poi per 10^5. Otteniamo:

$10^3 \cdot a = 4123,\overline{45}$ e $10^5 \cdot a = 412345,\overline{45}$.

Eseguiamo la sottrazione $10^5\cdot a - 10^3 \cdot a = (10^5 - 10^3)\cdot a = 412345 - 4123 = 408222$.

Ricaviamo quindi a ottenendo la frazione:

$$a = \frac{408222}{99000} = \frac{22679}{5500}.$$