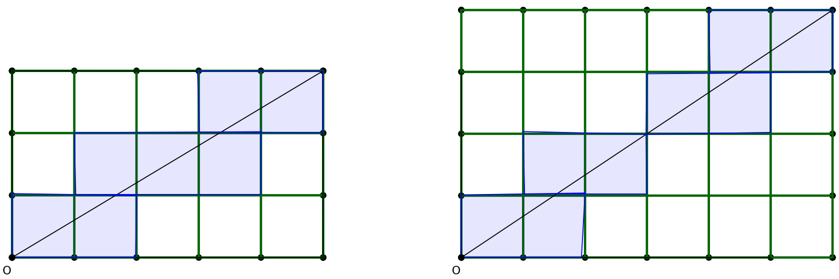
Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

Proponiamo un lavoro che sollecita la riflessione sulle nozioni forma e proporzionalità, di multipli e divisori, di massimo comun divisore, di punti a coordinate intere sul piano cartesiano, rapporto tra numeri e diagonale di un rettangolo, a partire da una situazione geometrica apparentemente scollegata dalla situazione problematica proposta.
Il lavoro offre spunti per formulare congetture e discuterle, trovando controesempi o argomenti in sostegno.
La tavola e le attività correlate prendono ispirazione dall'articolo di David L. Pagni, Counting Squares, The Mathematical Teacher, Vol. 84, No. 9 (December 1991), pp. 754-758.

Viene presentata anche una versione 'abbreviata' dell'attività, che richiede un tempo più breve di lavoro ma mantiene gli obiettivi formativi.

Tavola A

1. Osserva i rettangoli in figura. La diagonale interseca alcuni quadretti nel loro interno. Quanti sono questi quadretti?



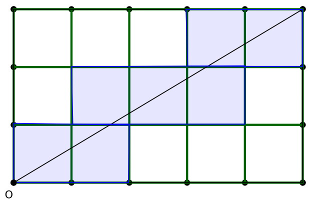
2. Utilizza la carta quadrettata per disegnare rettangoli. Per ciascun rettangolo, disegna una diagonale e conta il numero N di quadrati 1x1 intersecati dalla diagonale in almeno un punto interno. Riporta il numero N calcolato nella tabella.
3. Cerca di trovare una legge che, conoscendo la base b e l'altezza h del rettangolo, descriva il numero N.

b	h	N
5	3	7
6	4	

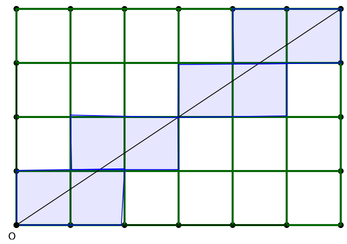
Descrizione della tavola

Nella tavola A sono proposti due rettangoli disegnati su carta quadrettata. In ciascuno di essi, è disegnata una diagonale e sono colorati i quadretti attraversati dalla diagonale in almeno un punto interno.
Si chiede allo studente di contare il numero N dei quadretti colorati, riportando la risposta in una tabella. Più precisamente, si chiede di disegnare vari esempi, cercando di individuare una formula che esprima il numero N (di quadretti attraversati dalla diagonale) a partire dalle lunghezze della base b e dell'altezza h. Le lunghezze di base e altezza sono misurate tramite il lato del quadretto.

Il lavoro viene svolto in piccoli gruppi, cui sono forniti fogli con quadretti da 1 cm; ogni tanto, si fa il punto della situazione collettivamente.

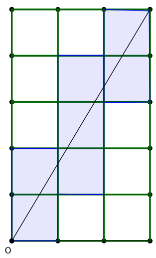


Rettangolo 5×3 , N=7

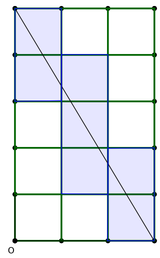


Rettangolo 6×4 , N=8

Dopo una fase iniziale di tentativi, si cerca di fare in modo che l'analisi venga organizzata in modo efficace. Si comprende rapidamente che è sufficiente studiare rettangoli con base maggiore o uguale all'altezza, perché N non dipende dalla scelta della diagonale disegnata, e quindi non cambia se si ruota il rettangolo.



Rettangolo 3×5 , N=7
da confrontare con il rettangolo 5×3



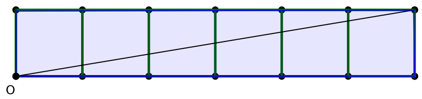
Rettangolo 3×5 , cambiando la diagonale

Poiché nel rettangolo ci sono $b \times h$ quadretti, sappiamo che

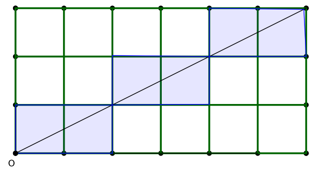
$$\mathbf{N \leq b \times h}$$

Possiamo, per cominciare, elencare tutti i casi con base e altezza minore o uguale di 6. Possiamo lavorare considerando i casi con altezza 1, poi passare allo studio dei rettangoli con altezza 2, e proseguire aumentando di 1 l'altezza. A parità di altezza, procediamo incrementando la base un passo alla volta. I valori ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

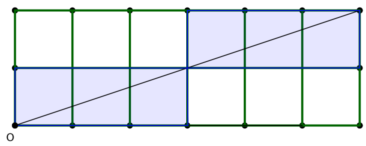
b	**h**	**N**
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
5	1	5
6	1	6
2	2	2
3	2	4
4	2	4
5	2	6
6	2	6
3	3	3
4	3	6
5	3	7
6	3	6
4	4	4
5	4	8
6	4	8
5	5	5
6	5	10
6	6	6



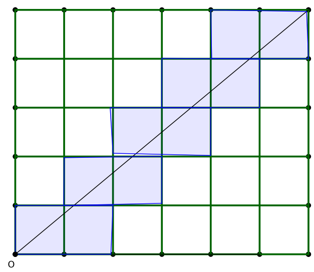
Rettangolo 6 × 1, N=6



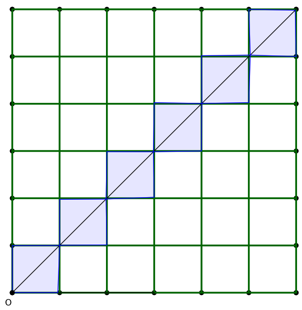
Rettangolo 6 × 3 , N=6



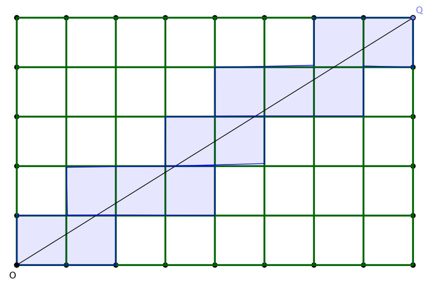
Rettangolo 6 × 2 , N=6



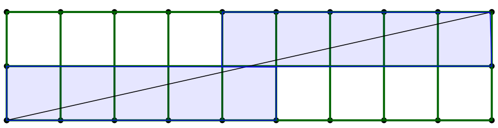
Rettangolo 6 × 5, N=10



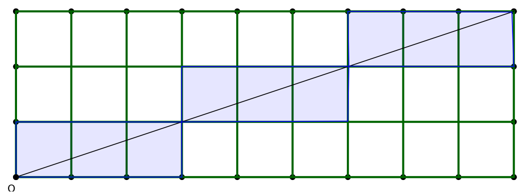
Rettangolo 6 × 6 , N=6



Rettangolo 8 × 5, N=12



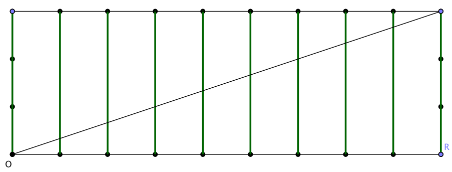
Rettangolo 9 × 2 , N=10



Rettangolo 9 × 3, N=9

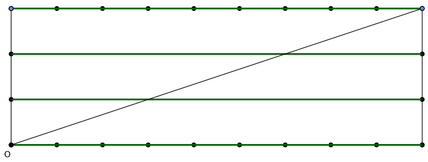
Ci si convince facilmente che nei quadrati, il numero N coincide con il lato b=h del quadrato.
Nei rettangoli di altezza 1, il numero N coincide con la lunghezza della base, perché la diagonale deve attraversare tutti i quadretti che compongono il rettangolo. E' possibile quindi che qualche studente congetturi la formula N=b o N=b+h-1: ma il rettangolo 6 × 4 , N=8, proposto nella tavola, mostra che tali congetture sono errate.

Per 'attraversare un quadretto', la diagonale (percorsa da O al vertice opposto) deve 'entrare', e ciò è possibile attraverso la base del quadretto o il suo lato verticale sinistro Nel rettangolo, poniamo l'attenzione ai lati verticali e ai segmenti lunghi come l'altezza e a essi paralleli che delimitano i quadretti; chiamiamo 'striscia' la parte del rettangolo tra due segmenti verticali consecutivi. **La diagonale uscente da O attraversa b 'strisce' verticali e quindi 'entra da sinistra' in b quadretti.**



Rettangolo 9 × 3, 9 strisce verticali

Guardiamo ora le basi del rettangolo e tutti gli h+1 segmenti orizzontali paralleli alla base e lunghi come la base, che formano i lati orizzontali dei quadretti. Deduciamo che **la diagonale uscente da O attraversa h 'strisce' orizzontali e quindi 'entra da sotto' in h quadretti**.



Rettangolo 9 × 3, 3 strisce orizzontali

Dunque, la diagonale entra 'dal basso' in h quadretti, e entra da sinistra in b quadretti. In particolare, possiamo concludere che (poiché stiamo assumendo che b≥h)

$$b \le N \quad e \quad N \le b+h$$

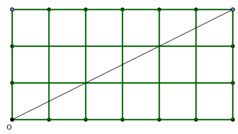
Possiamo anche dire che N è uguale a b+h? No, perché è possibile che un ingresso sia contato simultaneamente sia come 'dal basso' che 'da sinistra': ad esempio, il quadretto di vertice O viene contatto sia nella fascia orizzontale che nella fascia verticale. Più precisamente, la diagonale 'entra' nello stesso quadretto sia dal sotto che da sinistra esattamente quando la diagonale passa per il vertice in basso a sinistra del quadretto: questi quadretti sono contati due volte nella stima b+h.

Sempre immaginando di percorrere la diagonale a partire da O verso il vertice opposto, Introduciamo il numero V di vertici di quadretto attraverso cui la diagonale 'entra dal basso': in tale numero è compreso il vertice O ma NON è compreso il vertice Q opposto a O nel rettangolo iniziale. Nella tabella, aggiungiamo la colonna con i valori di V. Si ricava la formula

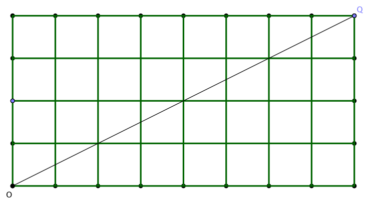
$$N = b+h-V$$

che viene confermata dall'analisi della tabella.

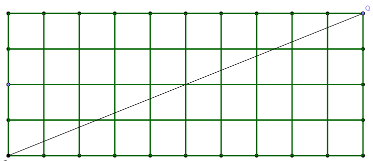
b	h	V	N
1	1	1	1
2	1	1	2
3	1	1	3
4	1	1	4
5	1	1	5
6	1	1	6
2	2	2	2
3	2	1	4
4	2	2	4
5	2	1	6
6	2	2	6
3	3	3	3
4	3	1	6
5	3	1	7
6	3	3	6
4	4	4	4
5	4	1	8
6	4	2	8
5	5	5	5
6	5	1	10
6	6	6	6



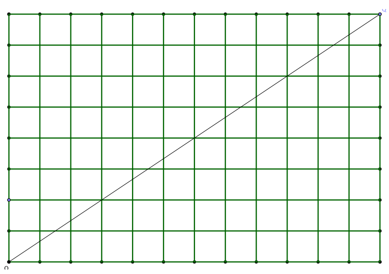
b=6, h=3, N=6, V = 3



b=8, h=4, N=8, V = 4



b=10, h=4, N=12, V = 2



b=8, h=4, N=8, V=4

Versione abbreviata dell'attività

È possibile proporre agli studenti la Tavola Abis, nella quale sono proposti due rettangoli disegnati su carta quadrettata. In ciascuno di essi, è disegnata una diagonale.

Si chiede allo studente di osservare i quadretti della carta quadrettata e osservare quando la diagonale passa per un loro vertice. Si chiede quindi di contare il numero M di vertici dei quadretti che compaiono sulla diagonale.

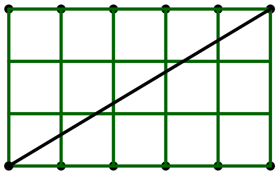
Studiati i casi proposti nella tavola, si chiede di disegnare vari esempi, cercando di individuare una formula che esprima il numero N (di quadretti attraversati dalla diagonale) a partire dalle lunghezze della base b e dell'altezza h. Le lunghezze di base e altezza sono misurate tramite il lato del quadretto.

Rispetto alle notazioni precedenti risulta M = V+1 (se ci si accorda di conteggiare anche il vertice O e il vertice opposto a O nel rettangolo di partenza). Formulata una tabella analoga a quanto sopra riportato, si prosegue cercando di interpretare il significato del numero M e di motivare perché in alcuni rettangoli esso sia maggiore di 2.

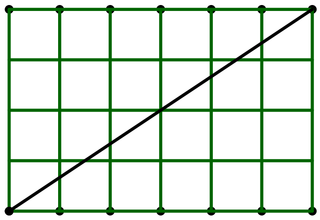
Alternativamente, è possibile chiedere ai ragazzi di contare solo i vertici 'interni' al rettangolo, ottenendo un numero pari a V-1.

Tavola A_bis per una attività abbreviata

1. **Osserva i rettangoli in figura. La diagonale passa per i vertici dei quadretti? Per quanti di essi?**



O



O

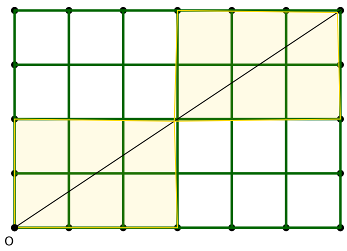
2. **Utilizza la carta quadrettata per disegnare altri rettangoli e le loro diagonali.**

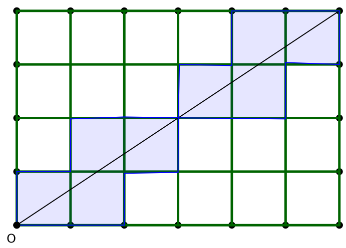
Per ciascun rettangolo, disegna una diagonale e conta il numero M di vertici dei quadretti sulla diagonale in almeno un punto interno. Riporta il numero calcolato nella tabella.

b	h	M
5	3	2
6	4	3

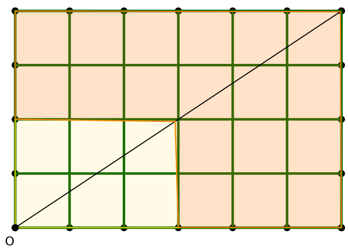
Cerca di trovare una legge che, conoscendo la base b e l'altezza h del rettangolo, descriva il numero M.

Ma possiamo interpretare la formula in un altro modo? **qual è il significato di V**? **Analizziamo i rettangoli in cui V è maggiore di 1**. Sempre percorrendo la diagonale a partire da O, mettiamo in evidenza il primo vertice V incontrato. Coloriamo il rettangolo che ha per vertici opposti O e V.

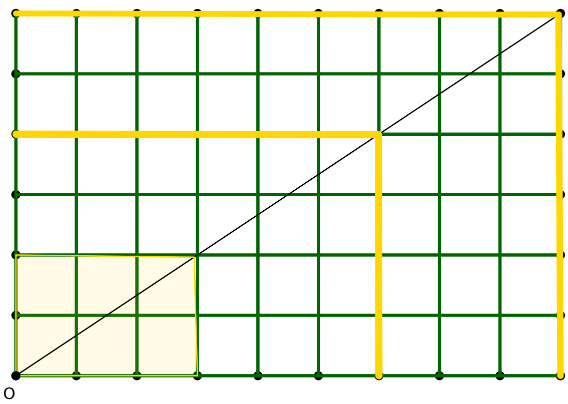


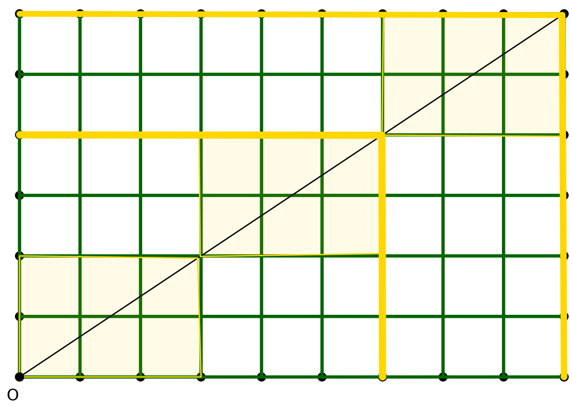


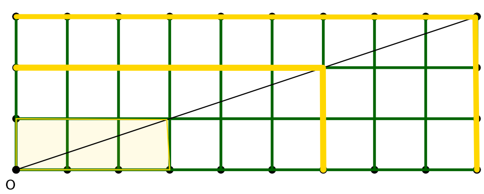
Poi proseguiamo il cammino lungo la diagonale e, con lo stesso colore, coloriamo ogni volta il rettangolo individuato da due vertici successivi. I rettangoli così creati, risultano uguali e contengono una porzione azzurra sempre della stessa forma di quadretti intersecati dalla diagonale.
Cambiando base e altezza, possono cambiare le dimensioni dei rettangoli piccoli, come anche delle configurazioni azzurre in essi contenute.

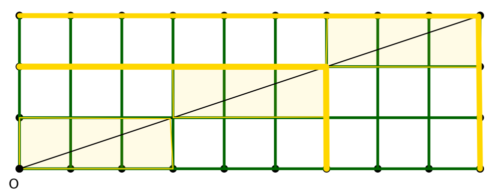


Nella figura, con quattro copie del rettangolo giallo **R** individuato da O e il primo vertice si ‘pavimenta’ il rettangolo grande 6 $\times$ 4. Una situazione analoga si crea ogni qual volta V=2.

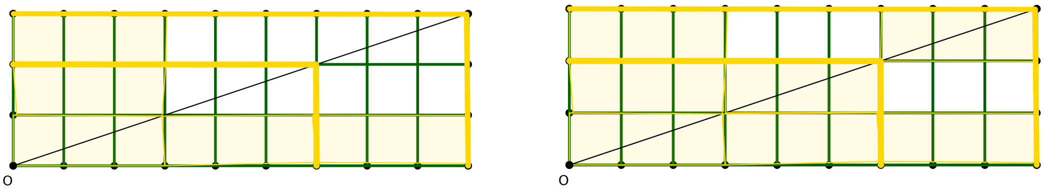








I rettangoli individuati da O e da un vertice sulla diagonale hanno le diagonali allineate e sovrapposte. Ciascuno di essi ha base e altezza intera e può essere ‘piastrellato’ con un numero intero di copie del rettangolo giallo $\mathcal{R}$ individuato da O e il primo vertice 'piastrella': il rettangolo successivo si ottiene 'bordando ' il precedente con copie di $\mathcal{R}$.



il numero di copie di $\mathcal{R}$ necessarie per ricoprire la base del rettangolo iniziale è quindi lo stesso che serve per comporre l'altezza, e coincide con il numero di copie di $\mathcal{R}$ sulla diagonale.
In particolare,

- la base b' di $\mathcal{R}$ deve dividere la base b del rettangolo iniziale
- l'altezza h' di $\mathcal{R}$ deve dividere l'altezza h del rettangolo iniziale
- la diagonale d' di $\mathcal{R}$ deve dividere la diagonale d del rettangolo iniziale
- il fattore di moltiplicazione è sempre lo stesso: esiste c con

  b = c b' h = c h' d= c d'
- il fattore c coincide con il numero di rettangoli $\mathcal{R}$ da disporre sulla diagonale d: ma allora c coincide con il numero di vertici V. Possiamo riscrivere la relazione in

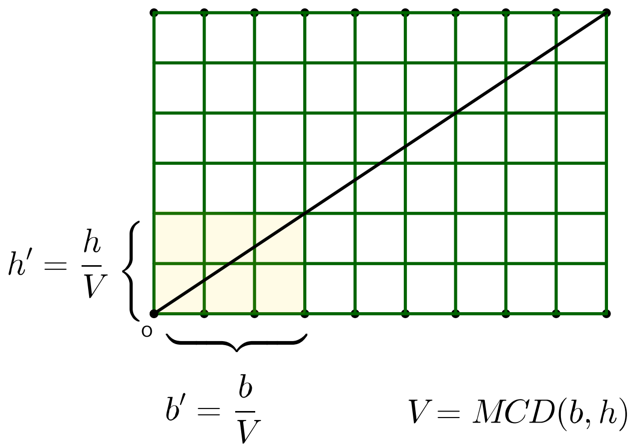
  b = V b' h = V h' d= V d'

Il numero V è, in particolare, un divisore comune di b e h. Ogni divisore comune t di b e h permette di suddividere il rettangolo iniziale in rettangolini di base b/t e altezza h/t.
I rettangoli individuati da O e da un vertice sulla diagonale sono simili tra loro. La figura mette in evidenza che il rettangolo $\mathcal{R}$ è il più piccolo rettangolo con lati interi che sia simile al rettangolo di partenza. Il numero V deve quindi coincidere con il Massimo comune divisore di b e h:

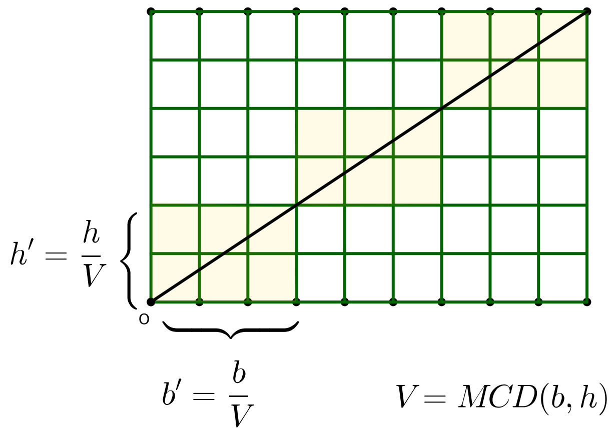
V= MCD(b,h)

Ricaviamo quindi che

N = b + h – MCD(b, h)



Inoltre, se mettiamo in evidenza colorando il giallo come prima le copie del rettangolo $\mathcal{R}$ lungo la diagonale, possiamo osservare che **il numero di quadretti colorati in giallo è il minimo comune multiplo di h e b**: infatti, facendo 'scendere' i rettangoli e allineandoli sulla base b, costruiamo un rettangolo b×h' (la cui area è multiplo di b). Allo stesso modo, spostando a sinistra i rettangoli e allineandoli sull'altezza h, costruiamo un rettangolo b' × h (la cui area è multiplo di h). Dunque, l'area colorata è un multiplo comune di b e h'. Per quanto osservato prima, è il multiplo comune minimo.



Il minimo comune multiplo di b e h coincide con l'area dei rettangoli colorati

Il minimo comune multiplo è dunque uguale al numero di quadretti del rettangolo h' × b, e il numero di tali rettangoli necessario per pavimentare il rettangolo b × h e' pari a V= MCD(b,h).
Ricaviamo la relazione numerica che lega minimo comune multiplo, massimo comune divisore e i due numeri b e h:

$$\mathbf{mcm(h,b) \times MCD(b,h) = b \times h}$$