Introduzione a una teoria assiomatica materiale

Una teoria assiomatica (o, sistema assiomatico) comprende il seguente insieme di informazioni
1. Un elenco di **termini primitivi (o indefiniti)**, cioè un elenco di parole per le quali non viene fornita una descrizione precisa, ma solo una spiegazione. Le parole in questo elenco vengono utilizzate nella teoria successiva come se fossero noti e condivisi da tutti.
2. Un elenco di **assiomi** (detti anche **postulati**): sono enunciati che illustrano le proprietà dei termini primitivi e le loro relazioni. Tali enunciati vengono considerati veri.
3. Un elenco di **regole logiche**: queste sono le uniche regole da utilizzare.

A partire da questi dati, è possibile introdurre altri termini (ma solo se definiti con precisione) e altri enunciati (ma solo se essi possono essere dimostrati utilizzando solo le regole logiche specificate e gli assiomi):
4. Le **definizioni**: un elenco di parole (che puo' essere allungato a piacere) di termini che vengono univocamente precisati, utilizzando i termini primitivi, gli assiomi o le definizioni introdotte in precedenza. Sono parole che spesso vengono introdotte per comodità, per rendere più corti ed efficaci gli enunciati.
5. I **teoremi**, cioè enunciati per i quali è possibile dimostrare che sono veri usando solo i temini primitivi, gli assiomi, le regole logiche. Naturalmente, e' possibile utilizzare nella dimostrazione anche teoremi già dimostrati in precedenza.
Per precisione, bisognerebbe inserire nella struttura assiomatica anche la lingua nella quale ci esprimiamo. Inoltre, utilizzeremo spesso, senza dichiararlo, i numeri reali, parte della teoria degli insiemi, la logica aristotelica.
Eventuali raffigurazioni possono essere utilizzate solo come supporto, e non costituiscono una dimostrazione.
Un sistema assiomatico è **consistente (o coerente)** se non contengono contraddizioni (cioe' non ci sono enunciati che sono veri e falsi contemporaneamente, in essi).
Un **modello** di un sistema assiomatico si ottiene assegnando ai termini primitivi un significato, in modo che valgano gli assiomi. Esistono modelli concreti (ottenuti utilizzando oggetti e relazioni concreti) e modelli astratti. **Se è possibile trovare un modello concreto per un sistema assiomatico, allora il sistema è consistente**.
Un sistema assiomatico è **completo** se, comunque fissato un enunciato, è possibile dimostrare che esso è vero o è falso. Il sistema assiomatico dell'aritmetica non è completo (Gödel).
In un sistema assiomatico, un assioma è **indipendente** dagli altri se non può essere dedotto come un teorema utilizzando solo gli altri assiomi.
Due modelli di uno stesso sistema assiomatico sono **isomorfi** se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi, tale che conservi tutte le relazioni.

Argomentazione valida e dimostrazioni dirette e indirette

Un ***teorema*** (affermazione dimostrata) è dedotto utilizzando tautologie o argomentazioni valide a partire da una lista di termini non definiti (concetti primitivi), termini definiti (definizioni), ipotesi, teoremi dimostrati in precedenza.

Definizione. Un ***argomento*** consiste di premesse e di una conclusione. Diciamo che l'argomento è **valido** se (e solo se) la conclusione è vera in tutti i casi in cui le premesse sono vere. Se le premesse sono $p_1, ..., p_n$ e la conclusione è q, l'argomento è valido se e solo se $(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \Rightarrow q$ è una tautologia.
Esempi (a) Un argomento valido tramite il *modus ponens*: supponiamo di sapere che
$p \Rightarrow q$: *Se un parallelogramma è un quadrato, allora è un rettangolo*
e che
q: *Il parallelogramma considerato è un quadrato.*
Possiamo concludere che

Il parallelogramma considerato è un rettangolo.

(b) Un argomento valido per *transitività*: supponiamo di sapere
$p \Rightarrow q$: *Se un triangolo è isoscele, allora due suoi lati sono congruenti.*
e che:
$q \Rightarrow t$: *Se in un triangolo due lati sono congruenti, allora anche due angoli sono congruenti.*
Possiamo allora concludere che
$p \Rightarrow t$: *Se un triangolo è isoscele, due suoi angoli sono congruenti.*

Definizione. **La dimostrazione** di un teorema è una successione di argomenti validi che utilizzano le premesse del teorema e il sistema assiomatico.

Le giustificazioni permesse all'interno di una dimostrazione sono:
1) per ipotesi
2) per ipotesi assurda
3) per un assioma
4) per un teorema precedente
5) per definizione
6) per un passo di una dimostrazione precedente
7) per una regola di logica

In base agli argomenti utilizzati, le dimostrazioni sono *dirette* o *indirette*.

Esercizi: Siano n e m numeri naturali.
a) Mostra che se n è multiplo di 3, anche nm è multiplo di 3.
b) Mostra che $n\ (n+1)$ è pari.
c) Mostra che $n\ (n+1)\ (n+2)$ è multiplo di 3.
d) Mostra che se n è multiplo di 3, anche $n^2 - n$ è multiplo di 3.
e) Mostra che se n è multiplo di 3, il numero n^2 è multiplo di 9.
f) Mostra che se n è multiplo di 3, il numero n^2 è multiplo di 9.
g) Mostra che se n e m sono multipli di 3, anche $n+m$ è multiplo di 3.

Esempi di dimostrazioni indirette dell'implicazione $p \Rightarrow q$
1.**Dimostrazione per Contrapposizione** Supponi che $\neg q$. Tramite una dimostrazione diretta, sai dimostrare che $\neg p$. Concludi che $\neg q \Rightarrow \neg p$ e dunque $p \Rightarrow q$

2.**Dimostrazione per Contraddizione** Supponi $\neg p$. Tramite una dimostrazione diretta, sai dimostrare che q e, contemporaneamente, $\neg q$. Concludi che, vista la contraddizione trovata, p è dimostrata.

Per provare che un enuciato è falso, è sufficiente fornire un controesempio.

Esempi di sistema assiomatico
Il Club delle Tartarughe [Richard Trudeau, La rivoluzione non euclidea, Boringhieri, 1991, pp.30-34]

Termini primitivi: persona, insieme, appartenenza.
Definizioni: Il *Club delle Tartarughe* è un insieme di una o più persone.
Una persona appartenente al Club è detta *Tartaruga*.
I *comitati* sono insiemi di una o più Tartarughe.
Una Tartaruga appartenente a un Comitato è detta *membro* di quel comitato.
Due Comitati sono *uguali* se ogni membro del primo è anche membro del secondo, e se ogni membro del secondo è anche membro del primo.

Due comitati che non hanno membri in comune sono detti *disgiunti*.
Assiomi 1. Ogni Tartaruga è membro di almeno un Comitato;
2. Per ogni coppia di due distinte Tartarughe esiste uno ed uno solo Comitato di cui entrambe sono membri;
3. Per ogni Comitato esiste uno ed uno solo Comitato disgiunto da esso.

Teorema: Ogni Tartaruga è membro di almeno due comitati.
Dimostrazione [provare a farla prima di leggere il seguito]
Passo1: Sia "t" una Tartaruga. [ipotesi, denominazione]
Passo 2: t è membro di un Comitato "C" [Assioma 1, denominazione]
Passo 3. Esiste un comitato, che indichiamo con "D", che è disgiunto da C. [Assioma 3, denominazione]
Passo 4. Sia "u" un membro di D. [u esiste per definizione di Comitato]
Passo 5. u non è membro di C. [Definizione di "disgiunto"]
Passo 6. Esiste un Comitato, che indichiamo con "E", di cui sia t che u sono membri. [Assioma 2, denominazione].
Passo 7. C ed E non sono uguali. [Definizione di "uguale"; 5, 6]
Passo 8. t è membro sia di C che di E. [passi 2, 6]
Passo 9. t è membro di almeno due Comitati. [Passi 7, 8]
Passo 10. Di conseguenza ogni Tartaruga è Membro di almeno due Comitati. [generalizzazione: i passi precedentivalgono per ogni tartaruga]

Esercizi 1) Nel sistema del Club delle Tartarughe, mostra il Teorema 2: Ogni Comitato ha almeno due membri.
2) Considera il sistema assiomatico:
Termini primitivi: persona, insieme, appartenenza.
Definizioni: Il *Club di Facebook* è un insieme di uno o più utenti.
Una persona appartenente al Club è detta *Amico*.
I *Gruppi* sono insiemi di uno o più Amici.
Un Amico appartenente a un Gruppo è detta *membro* di quel comitato.
Due Gruppi sono *uguali* se ogni membro del primo è anche membro del secondo, e se ogni membro del secondo è anche membro del primo.
Due Gruppi che non hanno membri in comune sono detti *disgiunti*.
Assiomi 1. Ogni Amico è membro di almeno un Gruppo;
2. Per ogni coppia di due distinti Amici esiste uno ed uno solo Gruppo di cui entrambi sono membri;
3. Per ogni Gruppo esiste uno ed uno solo Gruppo disgiunto da esso.
Mostra che:
Teorema1: Ogni Amico è membro di almeno due gruppi.
Teorema 2: Ogni Gruppo ha almeno due membri.

Exercizi Considera il segente sistema assiomatico
Assioma1. Ogni formica ha almeno 2 case.
Assioma 2. Ogni casa ha almeno due formiche.
Assioma 3. Esiste almeno una formica.

a) Individua quali sono i termini primitivi in questo sistema assiomatico.
b) Dimostra che c'è almeno una casa.
c) Mostra che il minimo numero di case è 2.
d)Determina due modelli non isomorfi.

Il Piano di Fano

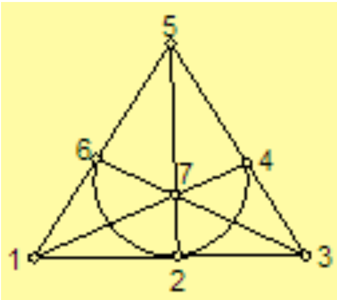
Gino Fano (1871–1952), un matematico italiano, ha fornito quello che è considerato il primo esempio di sistema assiomatico 'geometrico' relativo a un modello formato da un numero finito di punti. Tale esempio ha molteplici applicazioni. Illustriamo solo una parte dell'esempio; tale parte viene detta Piano di Fano.

Assiomi per il Piano di Fano
Termini primitivi: *punto, linea, incidenza.*
Assioma 1. Esiste almeno una linea.
Assioma 2. Ogni linea ha esattamente tre punti incidenti ad essa.
Assioma 3. Non tutti i punti sono incidenti alla stessa linea.
Assioma 4. C'è una e una sola linea incidente ogni coppia di punti distinti.
Assioma 5. C'è almeno un punto incidente a ogni coppia di linee distinte.
Due modelli isomorfi soddisfano gli assiomi del Piano di Fano:

Primo modello: è illustrato dalla seguente tabella

punti	linee
A, B, C, D, E, F, G	*ADB, AGE, AFC, BEC, BGF, CGD, FDE*

Secondo modello:



Nella Figura, i *punti* sono 7 piccoli cerchietti e le linee sono sei segmenti di retta (ciascuno dei quali contiene tre punti) e una porzione di circonferenza (contenente 4, 2, 6).

Esercizio 1: Nel piano di Fano, mostra il ***Teorema 1:*** *Due distinte linee incidono in esattamente un punto*.

Dim. Siano *r* e *s* due distinte linee. Per l'Assioma 5, esiste (almeno) un punto *A* incidente sia *r* che *s*. Supponiamo che ci sia un secondo punto, *B,* diverso da *A,* incidente sia *r* che *s*. Per l'Assioma 4, le linee *r* e *s* coincidono (perché una sola linea passa per A e B), ma questo contraddice l'ipotesi che *r* e *s* siano linee distinte. Dunque *r* e *s* si intersecano in un unico punto. Possiamo quindi affermare che due linee distinte qualsiasi incidono in un unico punto.

Esercizio 2: *Il piano di Fano è formato da 7 punti*.

Dim. Per l'Assioma 1, esiste (almeno) una linea *l*. Per l'Assioma 2, esistono esattamente 3 punti *A, B, C* incidenti la linea *l*. Per l'Assioma 3, esiste (almeno) un punto *D* che non incide la linea *l*. Dunque ci sono almeno 4 punti *A, B, C,* e *D*. Poiché D non incide *l*, per l'Assioma 4 c'è una linea *a* diversa da *l* che incide *A* e *D*. Allo stesso modo, ci sono una linea *b* diversa da *l* che incide *B* e *D* e una linea *c* diversa da *l* che incide *C* e *D*. Le rette *a, b* e *c* sono distinte tra loro e distinte da *l* (per gli Assiomi 2 e 3). Per l'Assioma 2, la linea *a* incide un terzo punto *A'* diverso da *A* e da *D*. Analogamente, per l'Assioma 2, la linea *b* incide un terzo punto *B'* diverso da *B* e da *D* e la linea *c* incide un terzo punto *C'* diverso da *C* e da *D*. Per l'assioma 4 nessuno tra i punti *A', B', C'* può coincidere con *A, B, C (*altrimenti dovrebbero coincidere coppie di linee che sappiamo essere distinte).

Dunque nel piano ci sono almeno 7 punti: *A, B, C, A', B', C'*, e *D*. Dobbiamo mostrare che non ci sono altri punti. Supponiamo che ci sia anche un altro punto *Q* diverso dai precedenti. Il punto Q non incide *l*, poiché *A, B,* e *C* sono gli unici punti che incidono *l* per l'Assioma 2. Il teorema 1, la linea per *D* e *Q* la linea *l* incidono esattamente in un punto, *R*. Tale punto R (per l'Assioma 2) deve coincidere con uno dei punti A, B, C (che sono i soli punti che incidono *l*). Supponiamo che *R = A*. Poiché *A'* appartiene alla linea *a* per A e P e il punto *A = R* appartiene alla linea per *D* e *Q*, i quattro punti distinti *R = A, A', D* e *Q* risulterebbero incidere la stessa linea, contraddicendo l'Assioma 2. In modo analogo, si esclude che *R* possa coincidere con *B* o con *C*. Concludiamo quindi che i punti nel piano di Fano sono esattamente 7.

Exercizi

- ***a)*** Mostra il Teorema 3: *Ogni punto nel piano di Fano incide esattamente 3 linee distinte*.
- ***b)*** Mostra il Teorema 4: *Nel piano di Fano ci sono esattamente 7 linee*.

Bibliografia: Richard Trudeau, La rivoluzione non euclidea, Boringhieri, 1991
Sitografia: http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C1AxiomSystem/AxSysWorksheet.htm - E1_2