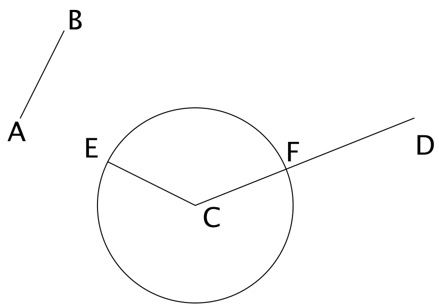
Per comodità di lettura, raccogliamo altri assiomi da aggiungere a quelli iniziali di Euclide. Questi assiomi sono solo una parte di quelli veramente necessari.

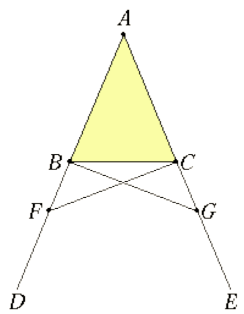
Assioma 7
a) Una retta (che si estende in modo indefinito in entrambe le direzioni) separa i punti del piano non appartenenti ad essa in due regioni dette ***semipiani****.*
b) Ogni linea, tracciata da un punto in un semipiano in un punto nell'altro semipiano, incontra la retta.
Assioma 8 *(LAL: Lato-Angolo-Lato) (sostituisce la Proposizione 4)*
Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, allora sono congruenti.
Assioma 9 *Triangoli congruenti hanno aree uguali.*

Proposizione I.3
Possiamo togliere da un segmento più lungo un segmento più breve.



Siano AB e CD due segmenti di differente lunghezza, e CD sia il più lungo.
Si chiede di togliere dal segmento più lungo CD un segmento uguale al più piccolo AB. Costruiamo CE a partire da C uguale alla linea retta AB, [prop I.2]
e descriviamo il cerchio con centro C e raggio CE [assioma 3]
Chiamiamo F l'intersezione tra il cerchio disegnato e il segmento CD [assioma 6]
Ora, siccome il punto C è il centro del cerchio EF, CE e' uguale a CF. [def. di cerchio]
Ma AB è anche uguale a CE, e dunque CF anche e' uguale a AB.[nozioni comuni]
Dunque, dati due segmenti AB e CD, CF uguale al minore AB è stata tolto da CD che è il maggiore. QED

Proposizione I.5
In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali e, se prolunghiamo i lati uguali, gli angoli sotto la base sono uguali.
Dimostrazione



Consideriamo un triangolo isoscele (I.Def.20) ABC con il lato AB uguale al lato AC. Prolunghiamo il lato AB a partire da B con BD e prolunghiamo il lato AC a partire da C con CE (post. I.2).
Vogliamo mostrare che gli angoli ABC e ACB sono uguali e che anche gli angoli CBD e BCE sono uguali tra loro.

Fissiamo un punto F su BD. Su AE, o su un suo prolungamento, prendiamo un punto G tale che AG sia lungo come AF [prop. I.3].
Congiungiamo B con G e C con F (post. I.1)
Consideriamo i triangoli AFC e ABG: essi hanno uguali i lati AF e AG, come anche i lati AC e AB. Inoltre, hanno in comune l'angolo FAG, compreso tra i lati uguali. I due triangoli sono

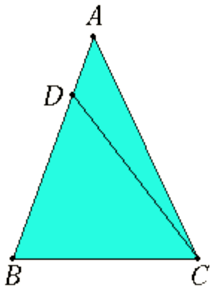
dunque congruenti per LAL. In particolare FC e BG sono uguali, gli angoli FCA e GBA coincidono e gli angoli AFC e BGA coincidono.
Ora consideriamo i triangoli BFC e BGC.
Poiché AF è uguale ad AG e AB è uguale ad AC, per differenza BF è uguale a CG (NC.3).
Inoltre i due triangoli hanno uguali i lati FC e BG e gli angoli BFC e BGC per quanto visto.
Dunque i due triangoli sono congruenti per LAL. In particolare, l'angolo CBF è uguale all'angolo BCG (che era uno dei risultati che volevamo dimostrare).
Abbiamo provato che gli angoli ABG e ACF sono uguali tra loro e gli angoli CBG e BCF sono uguali tra loro; possiamo quindi concludere che l'angolo ABC (ottenuto da ABG sottraendo CBG)è uguale all'angolo ACB (ottenuto da ACF sottraendo BCF) (C.N.3).
QED

La successiva proposizione è l'inversa della n.5.

Proposizione I.6

Se un triangolo ha due angoli uguali, allora i lati opposti agli angoli uguali sono uguali.

Dimostrazione



Sia ABC un triangolo nel quale l'angolo ABC è uguale all'angolo ACB. Dobbiamo mostrare che i lati AB e AC sono uguali.
Procediamo per assurdo. Se AB e AC non sono uguali, uno di essi è maggiore dell'altro (C.N.).
Dunque AB è maggiore o minore di AC.

Supponiamo che AB sia maggiore di AC. Nel segmento AB, fissiamo il punto D tale che BD sia uguale a AC (I.3) ;
tracciamo il segmento DC (I. Post. I).
Consideriamo i triangoli DBC e ACB: in essi BD=AB per costruzione, BC in comune, angolo in B in comune. Per LAL, i due triangoli sono quindi congruenti.
Per l'assioma 9, i due triangoli hanno aree uguali. Ma il triangolo BCD è strettamente contenuto in BCA, e ha dunque un'area strettamente minore. Assurdo: qundi non è possibile che AB sia maggiore di AC.
Supponiamo che AB sia minore di AC. (*completare per esercizio la dimostrazione)* ....
QED

Dunque: un triangolo ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali.
Si osservi che la legge utilizzata in I-6 (detta legge di tricotomia) secondo cui 'date due quantità omogenee AB e AC, allora AB>AC, oppure AB=AC oppure AB<AC' non è elencata nelle nozioni comuni.