Proposizioni e tavole di verità

Una ***proposizione*** è un enunciato (dichiarazione, frase) che può essere vero o può essere falso, ma non può essere contemporaneamente sia vero che falso. Essere vera o falsa sarà detto il ***valore di verità*** della proposizione.
Nel contesto di questo insegnamento, una proposizione deve essere decidibile (cioè deve essere vera o, in alternativa, falsa). Le frasi interrogative, esclamative, o che esprimono opinioni non sono proposizioni.
Esempio. Sono proposizioni:

- *Parigi è una città nel Lazio.*
- *Oggi è domenica* (ove si sia stabilito con precisione la data, il luogo, il calendario utilizzato)
- *I trapezi hanno una coppia di lati paralleli*

Non sono proposizioni:

- *Che ora è?*
- *3x = 5*
- *Il film è bello*

In alcuni casi, il valore di verità dipende dal contesto (come in *Tutti i bambini in questa palestra giocano a pallavolo, Oggi è domenica*): stabilire quale sia il grado di verità è possibile, ma occorrono informazioni aggiuntive. Per questo motivo, anche se la proposizione è sicuramente o vera o falsa (e le due opzioni sono alternative) occorre talora ritenere possibili entrambe le opzioni, in attesa che altre informazioni permettano di stabilire il valore di verità: la proposizione *Oggi è domenica* è da considerarsi vera se oggi è effettivamente domenica, falsa in un qualsiasi altro giorno della settimana.

Per indicare una proposizione, utilizzeremo spesso una lettera minuscole, come p, q. L'utilizzo di una lettera per simboleggiare una proposizione è utile in varie situazioni. Un primo esempio è legato alla possibilità di rappresentare in una breve tabella i possibili valori di verità, elencando tutti i casi possibili: tali tabelle sono dette ***tavole (o tabelle) di verità***.

Esempio. (V indica Vero, F indica Falso) Se abbiamo solo la proposizione p, la tavola della verità è:

p
V
F

Se abbiamo due proposizioni p e q, la tavola diventa:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

E' possibile che dichiarazioni diverse (ma che hanno lo stesso significato) esprimano la stessa proposizione. Per esempio, possiamo formulare lo stesso enunciato in lingue differenti: *Oggi è domenica*, *Today is Sunday, Aujourd'hui c'est dimanche* sono enunciati differenti, ma esprimono la stessa proposizione perchè hanno lo stesso significato (lo verifichiamo controllando che hanno la stessa tavola della verità). Ciò può accadere anche a due diverse dichiarazioni espresse nella stessa lingua, come per esempio *Questo nastro è lungo 3 cm* o *Questo nastro è lungo 0,3 m*. Quando due proposizioni hanno lo stesso significato (cioè hanno la stessa tavola della verità) sono considerati come se fossero la stessa proposizione e diciamo che sono logicamente equivalenti: dunque, **due proposizioni sono *(logicamente) equivalenti* se e solo se hanno gli stessi valori di verità (in tutti i casi)**.

Una ***tautologia*** è una proposizione che è vera in tutti i casi. Ad esempio *le rette l e m sono parallele oppure le rette l e m non sono parallele.*
Una ***contraddizione*** è un enunciato che è falso in tutti i casi. Ad esempio, *questo triangolo è isoscele e non è isoscele*.
Un ***paradosso*** è un enunciato che non è né vero né falso. Ad esempio, è un paradosso la frase: "*questa frase è falsa*".

Operatori sulle proposizioni

A partire da una o più proposizioni, è possibile costruire nuove proposizioni. Forniamo un elenco riassuntivo delle 'operazioni' che verranno studiate in dettaglio nel seguito.
1. La negazione di una proposizione vera produce una proposizione falsa, e viceversa. Ad esempio, la negazione di *il rettangolo è un parallelogramma* è *il rettangolo non è un parallelogramma*. La negazione di p si denota con il simbolo $\sim p$ o $\neg p$.
2. Due proposizioni p e q sono collegate con un ***connettivo logico*** tra i seguenti:

operazione su p e q	**simbolo**	**lettura del simbolo**	**esempio**
congiunzione logica	$p \wedge q$	p e q	*Guardo un film e mangio il pop-corn* *Sono richiesti l'invito e l'abito da sera*
disgiunzione logica	$p \vee q$	p o q	$x< y$ o $x>y$ *Leggo un libro o vado al cinema* *L'ingresso è riservato ai soci o a chi ha pagato il biglietto.*
implicazione logica	$\Rightarrow$	p implica q se p allora q	*Se ho la febbre, sono malato* *Se piove, andiamo al cinema*
coimplicazione logica	$\Leftrightarrow$	p se e solo se q	*Un triangolo è rettangolo se e solo se ha un angolo retto* *Un triangolo ha tre lati uguali se e solo se ha tre angoli uguali*

Viceversa, individuando i connettivi, è possibile riconoscere se una proposizione è stata creata connettendo proposizioni più semplici: diremo che stiamo 'riducendo' o 'scomponendo' la proposizione in proposizioni più semplici. Una ***proposizione elementare*** è una proposizione che non può essere ridotta ulteriormente, senza perdere significato. Ad esempio, *Carlo è a Roma* è una proposizione elementare, mentre non lo è *Giovanni saliva le scale e gli è arrivata una telefonata*.
Il valore di verità delle proposizioni composte (o della negazione di una proposizione) può essere dedotto in funzione del valore di verità delle proposizioni di cui è composta.

Negazione

La negazione di una proposizione *p* è la proposizione che è vera quando *p* è falsa e falsa quando *p* è vera. La negazione di p si denota con il simbolo $\sim p$ o $\neg p$ (che si legge *non* p).
Dunque, negando una proposizione vera otteniamo una proposizione falsa, e viceversa. Inoltre, la negazione è definita dalla tavola della verità

p	$\neg p$
V	F
F	V

Esempi: *p : mangio la mela*
¬p:non mangio la mela / non è vero che mangio la mela
q : dormo per terra
¬q:non dormo per terra/non è vero che dormo per terra

Si ricava che negando due volte si ritorna alla proposizione di partenza: $\neg(\neg p)$ è equivalente a p:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Osserva: la negazione richiede una particolare attenzione quando nella frase compaiono dei quantificatori; infatti, *la negazione di un esistenziale è un universale, mentre la negazione di un universale è un esistenziale*.

Esempi:

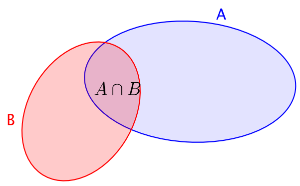
p : tutti i bambini parlano	*¬p:non tutti i bambini parlano/ c'è almeno un bambino che non parla*
q : non vado mai in piscina	*¬q:qualche volta vado in piscina/almeno una volta vado in piscina*
r: un alunno partecipa alla gara	*¬r:nessun alunno partecipa alla gara*
t:nessun genitore mi ha parlato	*¬t:mi ha parlato almeno un genitore/qualche genitore mi ha parlato*

Rappresentazione insiemistica

Gli insiemi possono essere rappresentati attraverso diagrammi di Eulero-Venn; è importante ricordare che l'aver disegnato un diagramma, non comporta necessariamente che gli insiemi rappresentati siano non vuoti.

Dato un insieme A, un suo sottoinsieme C è un insieme tale che tutti gli elementi di C sono anche elementi di A. In tal caso, scriviamo $C \subseteq A$.

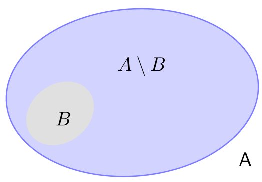
Dati due insiemi A e B, si denota con $\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$ l'insieme formato dagli elementi comuni di A e B: tale insieme è detto **intersezione di A e B**. L'insieme $A \cap B$ è un sottoinsieme sia di A che di B e può essere raffigurato come la parte più scura in

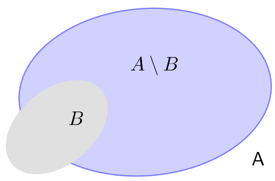


L'insieme unione di A e B, denotato con $A \cup B$, è invece l'insieme di tutti gli elementi che stanno in A o in B: $\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$

L'insieme complementare di B in A, denotato da A\B, è formato da tutti gli elementi di A che non sono in B: $\mathbf{A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}}$**.**

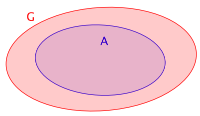
La definizione di A\B resta vera anche se B è un sottoinsieme di A.





Possiamo rappresentare le proposizioni in vari modi attraverso insiemi.

Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono gialle*. Possiamo rappresentare la proposizione *p* disegnando l'insieme G delle cose gialle e disegnando l'insieme A delle rose che



stiamo considerando come sottoinsieme di G:

Alternativamente, possiamo disegnare l'insieme A di tutte le rose, e in esso, il sottoinsieme B delle rose gialle. L'affermazione che la proposizione *p* sia vera, equivale al fatto che il sottoinsieme B coincide con A (perché non ci sono rose che non siano gialle). La negazione $\neg p$, significa che *non è vero che le rose sono gialle*: dunque, equivale a dire che il complementare A\B di B in A è non vuoto.

Esercizio: Mostra che $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Congiunzione

La ***congiunzione*** di due proposizioni p e q è una proposizione che è vera quando entrambe p e q sono vere, mentre è falsa in tutti gli altri casi. La congiunzione di due proposizioni p e q viene denotata con $p \wedge q$, che si legge p e q.

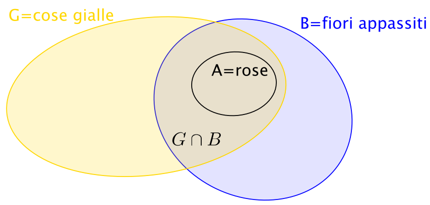
La tavola della verità di $p \wedge q$, in base al valore di verità delle proposizioni p e q, è la seguente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esercizi: - Determina la tavola della verità di $q \wedge p$.
- Determina la tavola della verità di $(p \wedge q) \wedge r$ (per tre proposizioni p, q, r).
- Determina la tavola della verità di $\neg (p \wedge q)$.
- Determina la tavola della verità di $(\neg p) \wedge q$.
- Determina la tavola della verità di $p \wedge (\neg q)$.

Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la congiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono gialle*, la proposizione *q: le rose sono appassite* e la congiunzione $p \wedge q$*: le rose sono gialle e appassite*. L'insieme delle rose gialle e appassite è l'intersezione dell'insieme delle rose gialle con l'insieme delle rose appassite.

Possiamo rappresentare verità della congiunzione $p \wedge q$ disegnando l'insieme G di tutte le cose gialle e l'insieme B di tutte le cose appassite. In questa rappresentazione, la verità della congiunzione $p \wedge q$ equivale al fatto che l'insieme A delle rose (di cui stiamo parlando) sia un sottoinsieme dell'intersezione G∩B:



Disgiunzione

La ***disgiunzione*** di due proposizioni p e q è una proposizione che è falsa quando entrambe p e q sono false, mentre è vera in tutti gli altri casi.

La tavola della verità di $p \vee q$, in base al valore di verità delle proposizioni p e q, è la seguente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

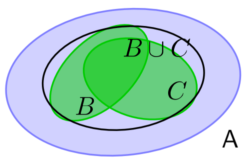
E' possibile distinguere due casi differenti di disgiunzione di due proposizioni p e q:
a) la *disgiunzione inclusiva* quando p e q possono essere vere contemporaneamente (talvolta indicata con e/o, in latino vel, in logica booleana OR)

E' richiesto il biglietto o l'abbonamento

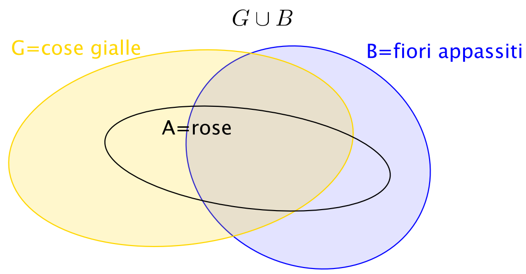
b) la *disgiunzione esclusiva* quando p e q non possono essere vere contemporaneamente, e quindi si escludono a vicenda (in logica booleana XOR, in latino aut, talora denotata con $p \dot{\vee} q$)

2>3 *oppure* 2<3

In italiano non si distingue in modo chiaro tra disgiunzione inclusiva e negazione esclusiva.
Rappresentazione insiemistica Possiamo rappresentare la disgiunzione attraverso gli insiemi. Consideriamo ad esempio la proposizione *p: le rose sono gialle*, la proposizione *q: le rose sono appassite* e la disgiunzione $p \vee q$*: le rose sono gialle o appassite*.
L'insieme delle rose che sono gialle o appassite coincide con l'unione dell'insieme B delle rose gialle e dell'insieme C delle rose appassite. La disgiunzione esclusiva corrisponde al caso in cui B∩C risulta vuoto.



Possiamo rappresentare la verità della disgiunzione $p \vee q$ disegnando l'insieme G di tutte le cose gialle e l'insieme B di tutte le cose appassite. In questa rappresentazione, la verità della congiunzione $p \wedge q$ equivale al fatto che l'insieme A delle rose (di cui stiamo parlando) sia un sottoinsieme dell'unione G∪B:



Esercizi: - Determina la tavola della verità di $q \vee p$.
- Determina la tavola della verità di $(p \vee q) \vee r$ (per tre proposizioni p, q, r).
- Determina la tavola della verità di $\sim(p \vee q)$.
- Determina la tavola della verità di $(\sim p) \vee q$.
- Determina la tavola della verità di $p \vee (\sim q)$.

Equivalenza

Due proposizioni sono ***(logicamente) equivalenti*** se e solo se hanno gli stessi valori di verità (in tutti i casi).

Esempio: Mostra che $\neg (p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ sono equivalenti.

p	q	$p \vee q$	$\neg (p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concludiamo che i due enunciati sono equivalenti, perché le tavole di verità coincidono.
Ad esempio, possiamo pensare
p: questo angolo è acuto
q: questo angolo è ottuso
$\neg (p \vee q)$: *non è vero che questo angolo è acuto o ottuso.*
$\neg p \wedge \sim q$: *questo angolo non è acuto e non è ottuso.*

Esercizi Mostra che la congiunzione è commutativa, cioè $p \wedge q$ è equivalente a $q \wedge p$
- Mostra che la congiunzione è associativa, cioè $(p \wedge q) \wedge r$ è equivalente a $p \wedge (q \wedge r)$
- Mostra che $\neg (p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ sono equivalenti.

Esercizio Costruisci la tavola della verità per $(p \vee \neg q) \wedge r$.
Dobbiamo considerare tutti i possibili valori di verità delle tre proposizioni semplici coinvolte, e dobbiamo quindi considerare $2^3 = 8$ possibilità.

p	q	r	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$(p \vee \neg q) \wedge r$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F

Proposizioni condizionali

Una ***proposizione condizionale*** è una proposizione della forma $p \Rightarrow q$, ove p e q siano due proposizioni. Ad esempio, se *p: il rubinetto è chiuso* e *q: non esce acqua dal mio lavandino*, otteniamo la proposizione condizionale *Se il rubinetto è chiuso, non esce acqua dal mio lavandino.*
Va osservato che non è rilevante che l'implicazione sia vera o falsa.
Esempi di una proposizione condizionale vera Se x è un numero pari, allora $x + 1$ è un numero dispari (b) Se $2 < 3$, allora $4 < 9$. (c) Se $3 < 2$, allora $9 < 4$.
Esempi di una proposizione condizionale falsa (a) Se x è un numero pari, allora $x + 2$ è un numero dispari. (b) Se $2 < 3$, allora $9 < 4$.
Esercizio: Trova la negazione della proposizione 'Se corro, allora ho sete'.

In una proposizione condizionale $p \Rightarrow q$, la proposizione p è detta ***antecedente (o ipotesi)***, mentre la proposizione q è detta ***conseguente (o tesi)***. Diciamo anche che p è ***condizione sufficiente*** per q, e che q è ***condizione necessaria*** per p.

La tavola della verità di una proposizione condizionale è la seguente (notare che, se l'ipotesi è falsa, si assume che l'implicazione sia vera sempre, interpretando l'implicazione come una promessa che non viene messa in discussione quando l'antecedente non accade):

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ad ogni proposizione condizionale $p \Rightarrow q$ risultano associate in modo formale altre proposizioni condizionali:

$q \Rightarrow p$ *l'implicazione inversa*

$\neg p \Rightarrow \neg q$ *l'implicazione contraria*

$\neg q \Rightarrow \neg p$ *l'implicazione contronominale*

Esempio: Considera la proposizione condizionale 'Se due rette del piano sono ortogonali, sono incidenti'. L'implicazione inversa è 'Se due rette del piano sono incidenti, allora sono ortogonali'. L'implicazione contronominale è 'Se due rette del piano non sono incidenti, non sono ortogonali.'

Esercizio: Trova l'implicazione inversa e la contronominale di 'Se corro, allora ho sete'.

Ogni proposizione condizionale è equivalente alla sua contronominale:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	F	F	**V**
V	F	V	F	**F**
F	V	F	V	**V**
F	F	V	V	**V**

Esercizio: (a) Trova una implicazione condizionale vera la cui inversa sia falsa.

(b) $\neg(p \Rightarrow q)$ è equivalente a $p \wedge \neg q$.

(c) $\neg(p \wedge q)$ è equivalente a $p \Rightarrow \neg q$.

(d) $p \wedge (q \vee r)$ è equivalente a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(e) $p \vee (q \wedge r)$ è equivalente a $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Una ***coimplicazione*** $p \Leftrightarrow q$ è vera se e solo se p e q hanno lo stesso valore di verità. La corrispondente tavola della verità è:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esercizio: $p \Leftrightarrow q$ è equivalente a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Le coimplicazioni sono frequenti in matematica; le definizioni sono spesso coimplicazioni.

Esempi (a) Un quadrilatero è un rettangolo se e solo se ha tutti gli angoli retti.

(b) $x^2 - x = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x+3 = 0$ or $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ or $x = 4$.

Sitografia

http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garetto/economia/logicainsiemistica.pdf Prof. Garetto, Elementi di Logica,
https://www.youtube.com/watch?v=JczNoE43IuM proposizioni, negazione, tavole della verità
https://www.youtube.com/watch?v=_fjT7fnvttU congiunzione, tavole della verità
https://www.youtube.com/watch?v=lJX1AHKHFKU disgiunzione inclusiva, tavole della verità
https://www.youtube.com/watch?v=ehDBklEAx9Y disgiunzione esclusiva, tavole della verità
https://www.youtube.com/watch?v=Z7P-H5iA8QY implicazione
https://www.youtube.com/watch?v=QCnB4bi1ay0 doppia implicazione

Affermazioni aperte e quantificatori

Definizione Una ***affermazione aperta*** è una affermazione che coinvolge una o più variabili.

Esempi

(a) $5 \geq 3x - 2$

(b) Il bambino ha un quaderno rosso.

Una affermazione aperta non è né vera né falsa: essa diventa una proposizione solo quando sono sostituiti valori particolari alle variabili, o è definito l'insieme sul quale va valutata (detto universo). Denotiamo con $p(x)$ una affermazione che coinvolge una variabile, x, e con $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una affermazione aperta nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Esempio $p(x_1, x_2, x_3, x_4)\ :\ x_2 = 5x_1 - 2x_3 + 7x_4$

Definizione L'*insieme di verità* di una affermazione aperta è la collezione degli oggetti di uno specifico 'universo' che rendono vera l'affermazione.

Esempio $p(x)\ :\ x < 3$

(i) Se l'universo è l'insieme dei numeri naturali, allora l'insieme di verità è $\{1, 2\}$.

(ii) Se l'universo è l'insieme dei numeri interi, l'insieme di verità è $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Definizione Fissata una affermazione aperta $p(x)$,

a) l'espressione

$$\forall x,\ p(x)$$

si legge 'per ogni x nell'universo considerato, $p(x)$ è vera'. Il simbolo $\forall$ viene detto ***quantificatore universale***.

b) l'espressione

$$\exists\, x,\ p(x)$$

si legge 'per qualche x nell'universo considerato, $p(x)$ è vera'. Il simbolo $\exists$ viene detto ***quantificatore esistenziale***.

c) L'espressione

$$\exists\,!\, x,\ p(x)$$

si legge 'per uno ed un solo x nell'universo considerato, $p(x)$ è vera'. Il simbolo $\exists\,!$ viene detto ***quantificatore di esistenza e unicità*** (ed è un particolare quantificatore esistenziale).

Esempio Nell'universo dei numeri reali $\exists\, x,\ x^2 > 0$ è vera, mentre $\forall\, x,\ x^2 > 0$ è falsa (per $x = 0$ l'affermazione non è vera).

Nella geometria euclidea, è vera la proposizione *Data una circonferenza, esiste* ***uno ed un solo*** *punto equidistante da tutti i punti della circonferenza.'* Ci si riferisce al centro della circonferenza.

Nel linguaggio corrente, i quantificatori non sono sempre espressi con chiarezza.

Esempi

(1) "*Alcuni quadrilateri sono quadrati*" significa "$\exists\, x$, (x è un quadrilatero e x è un quadrato)".

(2) "*Tutti i quadrati hanno quattro lati.*" significa " Per tutti gli x, se x è un quadrato, allora x ha quattro lati." In generale, "Tutti i $p(x)$ sono $q(x)$." significa "$\forall\, x,\ (\, p(x) \Rightarrow q(x))$".

(3) "*Nessun gatto ama bagnarsi*" significa che "*Ogni gatto non ama bagnarsi*", cioè " Per tutti gli x, se x è un gatto, allora è falso che x ama bagnarsi." L'insieme di verità di "Il gatto x ama bagnarsi" è l'insieme vuoto.

(4) "*C'è un dottore*" può significare oppure "*C'è esattamente un dottore*" oppure "*C'è almeno un dottore*"

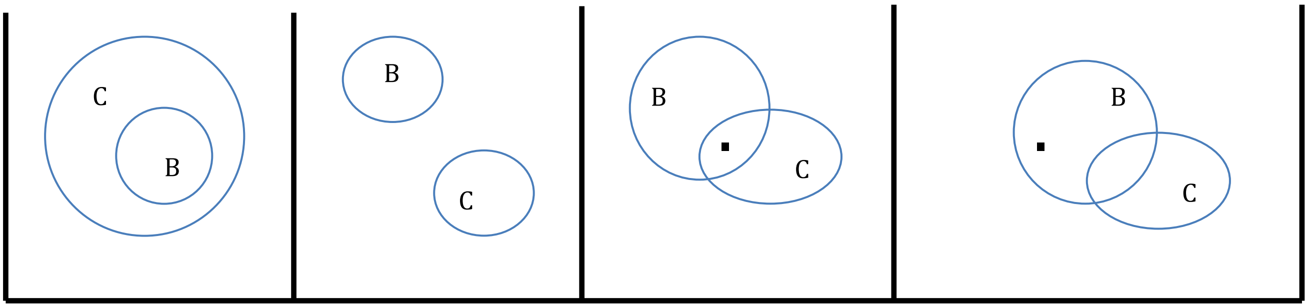
Frasi della forma: "Qualche B...", "Alcuni B..." verrano intesi nel senso di 'Esiste almeno un B....", non escludendo che tale B sia unico.

Le proposizioni aperte contenenti quantificatori sono suddivise in 4 differenti tipologie e vengono identificate da una vocale maiuscola A, I, E, O :

	Universale affermativa	***Esempi***	***Simbolo***
Universale affermativa	Tutti i B sono C Ogni B è C	Tutti i cani hanno la coda	A (è la prima vocale di **A**ffirmo)
Universale negativa	Nessun B è C Tutti i B non sono C Ogni B non è C	Nessun bambino ha il diario	E (è la prima vocale di Nego)
Particolare affermativa	Esiste un B che è C	Un bambino è seduto	I (è la seconda vocale di Affi**r**mo)
Particolare negativa	Esiste B che non è C	Qualche bambino non ha lo zaino	O (è la seconda vocale di Neg**o**)

Possiamo rappresentare insiemisticamente queste proposizioni, scegliendo sempre la rappresentazione più generale. La presenza di un puntino nell'insieme significa che c'è almeno un elemento.

Ogni B è C	Nessun B è C	Esiste un B che è C	Esiste un B che non è C



Per memorizzare i tipi, è possibile fare riferimento alla figura detta 'quadrato delle opposizioni':

Universale affermativa A	Universale negativa E
I Particolare affermativa	O Particolare negativa

Definizione Due affermazioni aperte, relative allo stesso universo, sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di verità.

> ***Esempio*** $x \le 3$ è equivalente a $x < 4$ nell'universo dei numeri naturali, ma non è equivalente nell'universo dei numeri reali.

Teorema Per ogni affermazione aperta $p(x)$,
(1) Negare che una proposizione sia vera per tutti gli x equivale a mostrare che esiste un x per cui la proposizione è falsa:

$$\neg(\forall\, x,\, p(x)) \text{ è equivalente a } \exists\, x,\, \neg\, p(x)$$

(2) Negare l'esistenza di un x per il quale la proposizione sia vera, equivale a mostrare che, per tutti gli x, la proposizione è falsa:

$$\neg(\exists\, x,\, p(x)\,) \quad \text{è equivalente a} \quad \forall\, x,\, \neg\, p(x)$$

Dimostrazione (1) $\neg(\forall\, x,\, p(x))$ è vero se e solo se $(\forall\, x,\; p(x))$ è falso
se e solo se l'insieme di verità di $p(x)$ non è tutto l'universo
se e solo se l'insieme di verità di $\neg p(x)$ è non vuoto,
se e solo se $\exists\, x,\, \neg\, p(x)$ è vero.

(2) Svolgere per esercizio (simile alla precedente).

Sillogismi condizionali

Il ragionamento è un movimento della mente tramite il quale passiamo da alcune affermazioni – confrontate tra loro – alla formulazione di una nuova affermazione, che segue necessariamente da quelle precedenti.
Un ***sillogismo*** (ragionamento concatenato) è un argomento formato da due proposizioni (dette *premesse*) e una terza proposizione, detta *conclusione*. Diciamo che la conclusione *discende logicamente* dalle premesse, o è *logicamente valida*, quando la conclusione resta vera in *tutti* i casi nei quali le premesse sono vere.
In un ***sillogismo condizionale***, una delle due premesse è una proposizione condizionale, mentre l'altra premessa afferma la verità o la falsità di uno tra antecedente o conseguente. La premessa che è una proposizione condizionale è detta ***premessa maggiore*** (ed è della forma *se p allora q*), mentre l'altra premessa è detta ***premessa minore*** (ed è data dalla proposizione p in forma affermativa o negativa oppure dalla proposizione q in forma affermativa o negativa). La ***conclusione*** può essere la proposizione p in forma affermativa o negativa oppure la proposizione q in forma affermativa o negativa (ma p e q non coincidono).
In un sillogismo condizionale, per discutere se la conclusione è logicamente valida, si suppone che le due premesse siano vere (indipendentemente dal fatto che a volte non sembrano ragionevoli) e si verifica se la verità della conclusione segue utilizzando solo le informazioni date dalle premesse.

Esempi:

Premessa maggiore: Se mi annoio, vado a teatro. *Premessa minore*: Mi annoio *Conclusione*: Vado a teatro	*Premessa maggiore*: Se indosso il cappotto lungo, inciampo. *Premessa minore*: Inciampo *Conclusione*: indosso il cappotto lungo
in questo caso, la conclusione è valida	conclusione non valida, perchè i motivi per cui inciampo possono essere tanti. E' possibile che io indossi il cappotto lungo, e la conclusione affermi un fatto vero, ma il ragionamento non è corretto.

Si possono presentare solo quattro casi di premesse per un sillogismo condizionale (le due premesse vengono raccolte da una parentesi grafa perché stiamo supponendo che siano entrambe vere):

$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{cases}$	
Modus ponens (affermazione dell'antecedente)	**affermazione del conseguente**	**negazione dell'antecedente**	**Modus tollens (negazione del conseguente)**

Il fatto che sia possibile dedurre una conclusione logicamente corretta dipende solo dalla struttura del sillogismo condizionale, e non dal contenuto delle proposizioni coinvolte.

	Modus ponens	**affermazione del conseguente**	**negazione dell'antecedente**	**Modus tollens**
Premesse	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ p \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \end{cases}$	$\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{cases}$	
conclusione valida	q	non ci sono conclusioni valide	non ci sono conclusioni valide	$\neg q$

Sillogismi categorici

Riprendiamo la classificazione già appresa sulle tipologie delle proposizioni aperte semplici che contengono quantificatori (le chiamiamo **asserzioni categoriche**):

1. ***Universale affermativa: "tutti i B sono C"*** L'enunciato afferma che ogni elemento che ha la proprietà B ha anche la proprietà C. Esempio: *Tutti gli italiani sono europei*.
Si designa l'enunciato universale affermativo con la lettera **A** (prima vocale di **A**FFIRMO)

2. ***Particolare affermativa: "qualche B è C"*** L'enunciato afferma che qualche elemento che ha la proprietà B ha anche la proprietà C. Esempio: *Qualche italiano è biondo.*
Si designa l'enunciato particolare affermativo con la lettera **I** (seconda vocale di AFF**I**RMO)

3. ***Universale negativa: "nessun B è C"*** L'enunciato afferma che nessun elemento che ha la proprietà B ha la proprietà C. Esempio: *Nessun corvo sta volando*.
Si designa l'enunciato universale negativo con la lettera **E** (prima vocale di N**E**GO)

4. ***Particolare negativa: "qualche B non è C"*** L'enunciato afferma che qualche elemento che ha la proprietà B non ha la proprietà C. Esempio: *Qualche corvo sta volando*.
Si designa l'enunciato particolare negativo con la lettera **O** (seconda vocale di NEG**O**)

Un sillogismo categorico è dato da due premesse e una conclusione, ciascuna delle quali sia una asserzione categorica. Il ***soggetto*** e il ***predicato*** della conclusione devono comparire uno in una premessa, e l'altro nell'altra: *si chiama* ***premessa maggiore*** *la premessa che contiene il predicato*, ***premessa minore*** *la premessa che contiene il soggetto*. Un ulteriore termine (detto ***termine medio***) compare in ciascuna delle premesse ma non nella conclusione. La conclusione è detta *logicamente valida* se è vera in tutti i casi in cui le premesse sono vere.

Il ***modo*** di un sillogismo in forma normale è dato dai tipi delle proposizioni categoriche in forma normale che esso contiene: A, E, I, O. Il modo viene identificato da una sequenza di tre lettere date in ordine definito, di cui la prima indica il tipo della premessa maggiore del sillogismo, la seconda il tipo della premessa minore, la terza il tipo della conclusione.
La ***figura*** di un sillogismo categorico indica la posizione del termine medio nelle premesse, posizione che può variare. Ci possono essere solo 4 possibili figure diverse in cui rispettivamente il termine medio può essere:

- prima figura: soggetto della premessa maggiore e predicato della premessa minore;
- seconda figura: predicato di entrambe le premesse;
- terza figura: soggetto di entrambe le premesse;
- quarta figura: predicato della premessa maggiore e soggetto della premessa minore.

Ci sono 64 modi diversi e 256 forme distinte (in base a modo e figura) possibili dei sillogismi categorici. Tuttavia, solo in pochi casi la conclusione è logicamente valida.

Esempi di sillogismi categorici e loro classificazione

	modo	**figura**	**conclusione valida**
Premessa maggiore: Tutti gli studenti amano cantare. *Premessa minore*: Mario è uno studente. *Conclusione*: Mario ama cantare.	A I I	I°	SI
Premessa maggiore: Qualche idraulico è giovane. *Premessa minore*: Qualche insegnante è giovane. *Conclusione*: Qualche insegnante è un idraulico.	I I I	II°	NO
Premessa maggiore: Qualche barbiere non è raffreddato *Premessa minore*: Tutti i barbieri sono biondi. *Conclusione*: Qualche biondo non è raffreddato.	OAO	III°	SI
Premessa maggiore: Qualche consigliere è avvocato. *Premessa minore*: Tutti gli avvocati sono laureati. *Conclusione*: Qualche laureato è un consigliere.	IAI	IV°	SI

Esercizio Per ciascuno dei sillogismi ipotetici nell'elenco, discuti se la conclusione è logicamente corretta:

a. Se supero l'esame della patente mi tingo i capelli.
   Ho superato l'esame della patente.
   Conclusione: Mi tingo i capelli.
b. Se non piove esco per una scampagnata.
   Piove.
   Conclusione: Non esco.
c. Se arrivo in ritardo, non vado al cinema.
   Non vado al cinema.
   Conclusione: Sono arrivato in ritardo.

Esercizio Per ciascuna delle coppie di premesse, discuti se è possibile trovare una conclusione logicamente corretta e, in caso positivo, trascrivila completando il sillogismo ipotetico:

d. Se non supero l'esame della patente mi tingo i capelli.
   Ho superato l'esame della patente.
   Conclusione: ……………………..
e. Se arrivo in ritardo, non vado al cinema.
   Vado al cinema.
   Conclusione: ………………..

Esercizio Per ciascuno dei sillogismi categorici, determina modo e figura, fornisci una rappresentazione insiemistica e discuti se la conclusione è logicamente corretta:

a. Tutti gli oleandri sono arbusti.
   Qualche arbusto è una pianta sempreverdi.
   Conclusione: Tutte le piante sempreverdi sono piante oleandri.
b. Qualche elefante è addormentato.
   Giorgio è un elefante.
   Conclusione: Giorgio è addormentato.
c. Nessun musicista è un muratore.
   Alcuni operai edili sono muratori.
   Alcuni operai edili non sono musicisti.

Esercizio Scrivi un sillogismo categorico per ciascuna figura.

Esercizio Per ciascuna coppia proposta di premesse, completa inserendo una conclusione e stabilisci se la conclusione è logicamente corretta:

a. Tutti gli autoveicoli devono rispettare il codice stradale.
   Tutti autobus sono autoveicoli.
   ....
b. I capelli sono sottili.
   Qualche capello è biondo.
   ....
c. Tutti i roditori sono mammiferi.
   Alcuni animali non sono roditori.
   ....
d. Tutti i roditori sono mammiferi.
   Alcuni animali non sono mammiferi.
   ....
e. Nessun ladro è una persona onesta.
   Gianni è un ladro.
   ....
f. Nessun ladro è una persona onesta.
   Gianni non è un ladro.
   ....