Università degli Studi di Roma Tor Vergata - TFA Classe A049
Complementi di matematica I 2013

Alcuni esercizi proposti

1.1) a) Mostra che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

b) Mostra che ogni radice reale di un polinomio $x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_1x + c_0$ con coefficienti interi e termine noto $c_0 \neq 0$, risulta essere un numero intero o irrazionale.

1.2) Determina la rappresentazione come frazione continua infinita semplice di $\frac{1+\sqrt{11}}{2}$.

1.3) Sapendo che $r = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ e $r > 1$, completa la frazione continua semplice $1/r = [0; \ldots]$.

1.4) Mostra che esiste un numero reale x tale che $2 = [1; 2, x] = [1; 2, 2, x] = [1; 2, 2, 2, \ldots, 2, x]$.

1.5) Dato un numero reale positivo x, è possibile stabilire chi è maggiore tra tra $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ e $[a_0; a_1, \ldots, a_n + x]$

1.6) Verifica che det $\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}$.

1.7) Determina i primi cinque convergenti di $[1; \overline{1}]$.

1.8) Esibisci due espressioni come frazioni continue semplici per $\frac{51}{11}$.

1.9) Rappresenta $2,7182$ e $\sqrt{31}$ come frazione continua semplice.

1.10) Individua i numeri razionali rappresentati da $[0; 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1]$ e da $[0; 1, 2, 1, 2, 1, 2]$, rispettivamente.

1.11) a) Determina i numeri reali rappresentati da $[1; \overline{2}]$, $[2; \overline{4}]$, $[3; \overline{6}]$.

b) Mostra che per ogni intero positivo n si ha $\sqrt{n^2 + 1} = [n; \overline{2n}]$.

1.12) Utilizza l'espansione di $\sqrt{5}$ come frazione continua semplice, determina una approssimazione razionale r/s tale che $|\sqrt{5} - r/s| < 10^{-6}$.

1.13) Valuta l'errore che si commette approssimando π con $3,14$ e confrontalo con quello che si commette approssimando π con il convergente c_2.

1.14) Sia $2 > \alpha > 1$ un numero reale irrazionale. Nel piano reale, considera la retta di equazione $y = \alpha x$ e i punti $A - n(p_n, q_n)$ con coordinate intere (mantenedo le notazioni consuete).

a) Mostra che il vettore $A_{n-2}A_n$ è multiplo intero di OA_{n-1}.

b) Mostra che l'area del triangolo $OA_{n-1}A_n$ è sempre $1/2$.

1.15) Mostra che due sollevamenti dello stesso diffeomorfismo di S^1 differiscono per un intero.

1.16) Mostra che, se $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è un sollevamento di un diffeomorfismo $f : S^1 \to S^1$, allora F^n è un sollevamento di f^n.

1.17) a) Mostra che, per ogni intero k, l'applicazione $T_{\omega,k} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, defínta da $T_{\omega,k}(x) = x + \omega + k$ è un sollevamento della rotazione di S^1 di angolo $2\pi\omega$ (che, parametrizzando S^1 con l'angolo, è descritta da $\theta \mapsto \theta + 2\pi\omega$).

b) Analogamente, mostra che $F(x) = x + \frac{\epsilon}{2\pi} sin(2\pi x) + k$ è sollevamento di $f : S^1 \to S^1$, $f(\theta) = \theta + \epsilon\, sin\theta$.