1 Valore Medio Momenti e Varianza di variabili aleatorie continue

Sia (X, Y) un vettore aleatorio continuo di densità $f_{X,Y}$ con densità marginali f_X e f_Y. Poniamo Diremo che X ha *valore medio finito* (*speranza matematica finita*) se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < +\infty. \tag{1}$$

In tal caso il valore medio si indica con $E(X)$ ed ha la seguente espressione

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx < +\infty. \tag{2}$$

Ricordiamo che *la media è un operatore lineare sullo spazio delle variabili aleatorie*, ovvero se $X_1, ..., X_m$ sono variabili aleatorie dotate di media, allora ogni combinazione lineare $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_mX_m$, con $a_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \{i, .., m\}$ ammette media finita uguale alla combinazione lineare delle medie.
Valgono inoltre le proposizioni già enunciate nel caso discreto

Proposition 1.1. *Sia $X = (X_1, ..., X_m)$ un vettore continuo di densità f_X e sia $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funzione. Si consideri la variabile aleatoria reale $Z = \phi(X)$. Z ha media finita se e solo se*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\phi(x)| f_X(x) dx < +\infty,$$

ed in tal caso

$$E(Z) = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) f_X(x) dx.$$

Proprietà 1.2. *Siano X ed Y variabili aleatorie di media finita.*

1 *Per ogni $c \in \mathbb{R}$ la variabile aleatoria cX ha media finita e*

$$E(cX) = cE(X).$$

2 *la variabile aleatoria $X + Y$ ha media finita e*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

3 *Se X ed Y sono indipendenti, allora XY ha media finita e*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

4 *Se $X \leq Y$ allora $E(X) \leq E(Y)$.*

Proof. **1** Sia $c \in \mathbb{R}$. Applichiamo la Proposizione 1.1 alla funzione $\phi(x) = cx$. Allora la variabile aleatoria cX ha media finita. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |cx| f_X(x) dx = |c| \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < +\infty,$$

perché per ipotesi X ha media finita; dunque

$$E(cX) = c \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = cE(X).$$

2 Applichiamo la Proposizione 1.1 alla funzione $\phi(x,y) = x + y$. Dimostriamo innanzitutto che la variabile aleatoria $X + Y$ ha media finita

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x + y| f_{X,Y}(x,y) dx dy \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x| dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} |y| dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_Y(y) dy < +\infty,
\end{aligned}$$

perché per ipotesi X ed Y hanno media finita; dunque ripetendo gli stessi calcoli senza moduli si ottiene

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f_{X,Y}(x,y) dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = E(X) + E(Y).
\end{aligned}$$

3 Applichiamo la Proposizione 1.1 alla funzione $\phi(x,y) = xy$ considerando che, essendo per ipotesi X ed Y indipendenti, $f_{X,Y} = f_X f_Y$. Dimostriamo dapprima che XYha media finita

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |xy| f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |xy| f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_Y(y) dx < +\infty,
\end{aligned}$$

perché per ipotesi X ed Y hanno media finita; dunque ripetendo gli stessi calcoli senza moduli si ottiene

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = E(X)E(Y).$$

□

Diamo un esempio di variabile aleatoria continua che non ha media finita.

Esempio 1.3. *(2.11 Abundo)*
Sia X una variabile aleatoria uniforme in $(-\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Calcolare la densità della variabile aleatoria $Y = \tan X$ e dimostrare che $E(Y)$ non esiste.

$f_X(t) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}(t)$ e la funzione $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to y(x) : y(x) = \tan x$ è strettamente crescente con codominio $\mathbb{R}$. Quindi, per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\tan X \leq t) = P(X \leq \arctan t) = F_X(\arctan t)$$

da cui derivando

$$f_Y(t) = f_X(\arctan t)\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

Per l' esistenza del valore medio si deve valutare la convergenza dell' integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_Y(t) dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)} dt$$

che è chiaramente divergente. Dunque la variabile aleatoria Y non ammette valore medio. La densità di Y è anche nota come densità di Cauchy.

Le definizioni di momento e di momento centrato sono le stesse date nel caso discreto, che qui riportiamo per comodità.

Definizione 1.4. *Diremo che X possiede il momento di ordine k, $k \in \mathbb{N}$ se la variabile aleatoria X^k ammette media finita, ed in tal caso si chiama momento di ordine k la quantità $E(X^k)$.*

Definizione 1.5. *Diremo che X possiede il momento centrato di ordine k, $k \in \mathbb{N}$ se la variabile aleatoria $(X - E(X))^k$ ammette media finita, ed in tal caso si chiama momento centrato di ordine k la quantità $E((X - E(X))^k)$.*

Grazie alla Proposizione 1.1, per il calcolo dei momenti e dei momenti centrati, è sufficiente conoscere la densità di X; infatti

$$E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)dx,$$
$$E((X - E(X))^k) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^k f_X(x)dx.$$

Ovviamente continua a valere anche la Proposizione 3.1

Proposition 1.6. *Se X possiede il momento di ordine k, allora possiede momento finito per ogni $j \leq k$;*
Se X ed Y possiedono momento di ordine k, allora anche $X + Y$ possiede il momento di ordine k.

Ricordiamo che il momento centrato di ordine 2 di una variabile aleatoria X si chiama *Varianza* di X. Ricordiamo inoltre che la varianza ha le proprietà stabilite nella seguente proposizione

Proprietà 1.7. *Siano X ed Y variabili aleatorie che ammettono varianza.*

1 *Per ogni $c \in \mathbb{R}$ la variabile aleatoria cX ha varianza pari a*

$$Var(cX) = c^2 Var(X).$$

2 *Per ogni $c \in \mathbb{R}$ la variabile aleatoria $X + c$ ha varianza pari a*

$$Var(X + c) = Var(X).$$

3 *la variabile aleatoria $X + Y$ ha ha varianza pari a*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y),$$

dove

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]. \tag{3}$$

2 Calcolo del Valore Medio Momenti e Varianza dei modelli continui notevoli

Per il calcolo della varianza useremo la rappresentazione $Var(X) = E[X^2] - E(X)^2$.

- **Variabile Uniforme nell' intervallo** $[a, b]$

Se $X \sim Un[a, b]$ allora $f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$. Poiché X è limitata, sicuramente ammette media (e momento di ogni ordine), che è uguale

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

Inoltre

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

e quindi

$$\begin{aligned} Var(X) =& \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \\ =& \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

- **Calcolo dei momenti di una Variabile** $\Gamma(\alpha, \lambda)$

Ricordiamo che la densità di $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ è

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x).$$

Questa variabile aleatoria ammette momento di ogni ordine, per via del fatto che la funzione $e^{-\lambda x}$ è infinitesimo di ordine superiore a qualunque potenza della x. Sia $\beta \in \mathbb{R}^+$. Con l' aiuto della proprietà della funzione Gamma, calcoliamo $E(X^\beta)$.

$$\begin{aligned} E(X^\beta) =& \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^\beta x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)dx = \\ =& \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\beta+\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)dx \end{aligned}$$

Con la sostituzione $y = \lambda x$ riscriviamo l' espressione precedente come

$$\begin{aligned} E(X^\beta) =& \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} y^{\beta+\alpha-1}e^{-y}\frac{1}{\lambda^{\beta+\alpha}}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y)dy = \\ =& \frac{1}{\lambda^{\beta+\alpha}}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} y^{\beta+\alpha-1}e^{-y}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y)dy = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\lambda^\beta\Gamma(\alpha)} \end{aligned} \tag{4}$$

- **Media e Varianza di una Variabile** $\Gamma(\alpha, \lambda)$

Dalla formula (4) ponendo $\beta = 1$ si ha

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

ponendo $\beta = 2$ si ha invece

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2},$$

da cui

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Ovviamente ***il caso*** $\alpha = 1$ ***corrisponde alla densità esponenziale di parametro*** λ.

- **Momenti, Media e Varianza di una Variabile** $N(0, 1)$

Ricordiamo che la densità di $X \sim N(0, 1)$ è

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Per la stessa ragione ricordata nel paragrafo precedente, questa variabile aleatoria ammette momento di ogni ordine, essendo la funzione $e^{-\frac{x^2}{2}}$ infinitesimo di ordine superiore a qualunque potenza della x.

Momenti Poiché $f_X(x)$ è una funzione pari,

X HA TUTTI I MOMENTI DI ORDINE DISPARI NULLI.

I numeri pari possono essere rappresentati tramite l' insieme $\{2k, k \geq 1\}$. Pertanto il problema si riduce a calcolare $E(X^{2k})$ per ogni $k \geq 1$. Inoltre, poiché $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, utilizzando l' identità $X^{2k} = (X^2)^k$, il problema si riduce a calcolare il momento di ordine k di una variabile $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Quindi, utilizzando l' espressione 4 per $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\beta = k$ si ottiene

$$E(X^{2k}) = E((X^2)^k) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k)}{\frac{1}{2^k}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2^k\Gamma(\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

Ricordando le proprietà della funzione Gamma, si ottiene

$$\begin{aligned}E(X^{2k}) =& \frac{2^k\Gamma(\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2^k(k-\frac{1}{2})\Gamma(k-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \\ =& \cdots\cdot\cdot = \frac{2^k(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})(k-\frac{5}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \\ =& 2^k(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})(k-\frac{5}{2})\cdots\frac{1}{2} = \\ =& (2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 3\cdot 1 = (2k-1)!!\end{aligned}$$

Media $E(X) = 0.$

Varianza $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1.$

- **Media e Varianza di una Variabile** $N(\mu, \sigma^2)$

  Ricordiamo che, se $X \sim N(0,1)$ allora $Y = \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pertanto, utilizzando le proprietà del valore medio e della varianza si ottiene facilmente

$$E(Y) = \sigma E(X) + \mu = \mu;$$

$$Var(Y) = Var(\sigma X) = \sigma^2 Var(X) = \sigma^2.$$

Esercizio 2.1. *(II scritto 18)*
Si consideri la v.a. bidimensionale (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(1-x-y+2xy) & se\ (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y e calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ e $cov(X,Y)$.
(ii) Trovare la densità di X condizionata a $\{Y = 1/3\}$ e calcolare $E(X|Y = 1/3)$.
(iii) Posto $U = X + Y$ e $V = X - Y$, calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio (U, V) e calcolare $E(U) + 7E(V)$.

(i) Per $x \in (0,1)$ si ha:

$$f_X(x) = \int_0^1 2(1-x-y+2xy)dy = 2\left(1 - x + \Big[-y^2/2 + 2xy^2/2\Big]_0^1\right) = 1.$$

Analogamente per $y \in (0,1)$ (l' espressione della densità congiunta è simmetrica in x e y):

$$f_Y(y) = 1.$$

Quindi, le marginali X e Y sono entrambe uniformemente distribuite nell' intervallo (0.1). Calcoliamo ora la covarianza. Intanto

$$E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^1 dyxyf(x,y) = 2\int_0^1 xdx \int_0^1 y(1-x-y+2xy)dy = \cdots = \frac{5}{18}\,.$$

Allora

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{5}{18} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{36}\,.$$

Le v.a. X e Y non sono indipendenti.
(ii) Si ha:

$$f_{X|Y}(x|1/3) = f(x,1/3)/f_Y(1/3) = 2(1-x-1/3+2x/3)/1 = \frac{2}{3}(2-x),\ x \in (0,1)$$

Inoltre

$$E(X|Y=1/3) = \int_0^1 \frac{2}{3}(2-x)xdx = \frac{2}{3}\Big[x^2 - x^3/3\Big]_0^1 = \frac{4}{9}\,.$$

(iii) Effettuando la trasformazione $(X,Y) \longrightarrow (U,V) = (X+Y, X-Y)$, si trova che $U \in (0,2)$ e $V \in (-1,1)$. La matrice Jacobiana della trasformazione inversa $(X,Y) = ((U+V)/2, (U-V)/2)$ vale $-1/4$, pertanto si trova:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}((u+v)/2,(u-v)/2)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(2-2u+u^2-v^2)\mathbf{1}_{(0,2)\times(-1,1)}(u,v).$$

Si ha, senza dover trovare le densità di U e V :

$$E(U + 7E(V)) = E(X) + E(Y) + 7(E(X) - E(Y)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

visto che $E(V) = E(X) - E(Y) = 0$, e X e Y sono uniformemente distribuite in $(0,1)$ e quindi hanno media $1/2$.