

$$-e^2 \cdot \frac{X}{10^{-6}} \cdot 1$$

Legge Normale

$$La \text{ f.d.e. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$x \in \mathbb{R}$ e' una densita' di prob.

Si dimostra infatti che (a) $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$
(b) (normalizzazione)

Inoltre $f(x) \geq 0$ e' evidente.

a) Se X ha densita' $f(x)$ allora X viene detta v.e. normale $N(0,1)$.

ii) $X \sim N(0,1)$ $Y = \sigma X + \mu$ dove $\sigma > 0$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\sigma|} f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Una v.e. che ha densita' f_Y si dice i.e. normale $N(\mu, \sigma^2)$

- Grafico della densita' e distribuzione.

Problema (a) se $X, Y \sim N(0,1)$

$$Z = X + Y$$

Dalle f.i.e di convoluzione

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} - xz\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x^2}{2} - xz + \frac{z^2}{4}\right) + \frac{z^2}{4}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x - \frac{z}{2})^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \quad \text{Densità } N(0,2)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(x - \frac{0}{2})^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}}}_{N(0,2)}$$

Funzione di ripartizione di $N(0,1)$

$$F(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Non si calcola analiticamente (non è un'elementare)
ma ci sono le tabelle (p. 134)

Prognosi

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \quad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2) \quad X \perp Y$$

$$(a) \quad X+Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2) \quad [\text{DA DISTINCAE con correlazione}]$$

$$(b) \quad X \sim N(0,1) \quad -X \sim N(0,1) \quad \text{ovvero le v.a. normali } N(0,1) \text{ sono simmetriche.}$$

Che signif. ha $-X \sim N(0,1)$?

$$P(-X \leq x) = P(X \leq x) = \Phi(x)$$

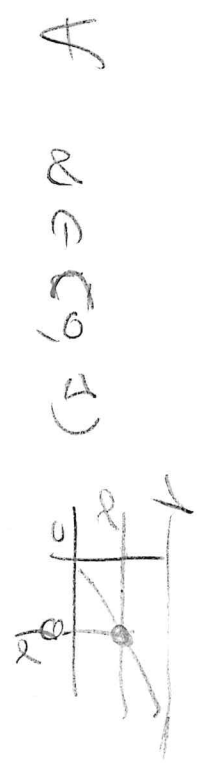
$$\underline{\underline{\text{ma}}} \quad P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$\boxed{\bar{\Phi}(x) = 1 - \bar{\Phi}(-x)}$$

~~Def~~

X v.e. qualunque con $\bar{F}_X$ continue -

(1) $\bar{F}_X(x) = \alpha$ ha soluzione



q_α soluzione di (1) t.e. $\bar{F}_X(q_\alpha) = \alpha$ è il quantile di ordine α dell'X

(c) Sia $\bar{F}_\alpha$ il p.e.h. di ordin α di $X \sim N(0, 1)$ -
Dalla (b) si ricave

$$\boxed{-\bar{\Phi}_\alpha = \bar{\Phi}_{1-\alpha}}$$

Nota: Sia $x_\alpha = \bar{\Phi}_\alpha$ ($P(X \leq \bar{\Phi}_\alpha) = \alpha$)

$$(b) \Rightarrow \bar{\Phi}(-\bar{\Phi}_\alpha) = 1 - \bar{\Phi}(\bar{\Phi}_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow \boxed{-\bar{\Phi}_\alpha = \bar{\Phi}_{1-\alpha}}$$

(Disegnano) p. 113
93

4.7 4.8 Baldi

Lege: Gamma

- Def Funzione $\Gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

non ha una primitiva semplice (transcendente) $\alpha \in \mathbb{N}$ è allora un caso particolare.

Proprietà di Γ

$$(a) \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$(b) \quad \Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \stackrel{\text{per parti}}{=} \int_0^{+\infty} (-x^{\alpha})' e^{-x} dx =$$

$$= -x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\alpha x^{\alpha-1} e^{-x} dx =$$

$$= 0 + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \Rightarrow \boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)}$$

$$(C) \quad \mathcal{A} = \mathcal{N} \in \mathcal{N}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2 \\ \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \end{array} \right]$$

ecc...

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\underline{\text{L'espérance}} \quad X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

se ha la densità seguente:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x^2} dy \quad x=y^2 \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Proprietà}} \quad \boxed{\Gamma(1, \lambda) = \exp(-\lambda)}$$

Dim perché sia una densità deve essere

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1 \quad \text{ovvero} \quad \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = 1$$

$$\underline{\text{In Patti:}} \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$\boxed{y = \lambda x}$$

$$dy = \lambda dx$$

$$dx = \frac{1}{x} dy \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x y^{\alpha-1} e^{-y} \frac{1}{x} dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$$

$$\underline{E_{\text{Sem}}(\mu^0)} \quad X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\left[Y = X^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right) \right]$$

$$\underline{\text{Dim}} \quad \bar{F}_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ (*) \end{cases}$$

$$(*) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) =$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad y \geq 0$$

Si ricomincia la densità $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right) = \sqrt{\pi}$

Oss Qui densità ricorre della Gamma

$$g(x) = \begin{cases} c \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

è una densità $\Gamma(\alpha, \lambda)$ e $\boxed{C = 1/\Gamma(\alpha)}$

Prop $X_1, \dots, X_m$ indep. $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$ $i = 1, \dots, m$

$$Y = \sum_{i=1}^m X_i \sim \Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_m, \lambda)$$

con p.e. convolutions
(DOP)
p. 95 Baldi

Funzione di ripartizione di $X \sim U(n, \lambda)$ ricorre

$$F_2(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = 1 - e^{-\lambda x} \quad (\text{expon}(1))$$

$$F_m(x) = \int_0^x \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} u^{m-1} e^{-\lambda u} du = (\text{per parti}) =$$

$$= \frac{\lambda^m}{(m-1)!} \left[\left(-\cancel{u}^{m-1} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} \right) \Big|_0^x - \int_0^x -\frac{\lambda^m}{(m-1)!} \int_0^x -\frac{\lambda^{m-2}}{\lambda} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} du \right]$$

$$= \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\lambda x} + \int_0^x \frac{\lambda^{m-1}}{(m-2)!} x^{m-2} e^{-\lambda u} du$$

$$\boxed{F_v. \text{ di } \Gamma(m-1, \lambda)}$$

$$= \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\lambda x} - \frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!} x^{m-2} e^{-\lambda x} - \dots - \lambda x e^{-\lambda x} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} x^k e^{-\lambda x}$$



Le leggi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ si chiamano $\chi^2(n)$ chi-quadrato
 con n gradi di libertà -
 (è la legge di $X_1^2 + \dots + X_n^2$ $X_i \sim N(0,1)$ ed indep.)

4.11 Bold

Speranza matematica (Baldi par. 4.7)

X, Y, P_X, P_Y

Def Se $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx < +\infty$ X ha sper. matematica

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

Stesse proprietà del caso discreto senza dim. $\square$ Prop. 4.3 Baldi

Calcolo del valor medio

1 - $U(a, b)$

2 - $N(0, 1), N(\mu, \sigma^2)$

3 - $\Gamma(\alpha, \beta) \Rightarrow X^2$

Def. momenti, momenti centrali, varianze come momento ordinale di ordine 2.

Calcolo varianze

1 $U(a, b)$

2 $N(0, 1), N(\mu, \sigma^2)$

3 $\Gamma(\alpha, \beta)$

Anticipare le congiunte alle medie
Esempio 1.2.
Speranza media
es. 2.11 Addendo

Calcolo dei momenti di una $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

2

$$E[X^p] = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}} x^p x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}} x^{p+\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\lambda^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\lambda^\beta}$$

$$\Rightarrow E[X^2] = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$$

Calcolo dei momenti di una $N(0, 1)$ $\left\{ \begin{array}{l} X \sim N(0, 1) \\ X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right.$

$$E[X^{2k+1}] = 0 \quad (\text{densità è pari})$$

$$E[X^{2k}] = E[(X^2)^k] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \frac{2^k}{2^k}$$

$$m_2 X^2 \sim \chi_1^2 \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}+k) = (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = 2^k \dots$$