

Lezione 2 bis (Baldi, Hood p. 149)

Var. multidimensionali continue

Sol Sia $X = (X_1, \dots, X_k)$ una v.a. multidimensionale.

Si chiama funzione congiunta l'applicazione

$$F: \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]: F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k)$$

Proprietà

$$i) \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$\lim_{x_k \rightarrow +\infty} F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = 1$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_k) = F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (\text{c.d.d.})$$

Oss1 Come si calcolano le fun. di ripartizione delle componenti (marginali)

$$F_{X_i}(x_i) = F_{X_1, \dots, X_k}(+\infty, +\infty, \dots, x_i, +\infty, +\infty)$$

Oss2 delle f.d.r. marginali non si riconosce la f.d.r. congiunta
a meno che le X_i non siano indipendenti

Def Una f.ue $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ è detta f.ue di densità confinata delle v.a. continue $(X_1, \dots, X_k)$ se e solo se

i) $f(x_1, \dots, x_k) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$

ii) $F_{X_1, \dots, X_k}(y_1, \dots, y_k) = \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_k} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k \quad (1)$

iii) $P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_k \leq X_k \leq b_k) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$
 È la densità della (i) ed è la densità della (ii) ed è la densità della (iii)

$$1 = F_{X_1, \dots, X_k}(+\infty, \dots, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, \dots, y_k) dy_1 \dots dy_k$$

Oss Nel caso scolare $P(X \in A)$, $A \in \mathbb{R}$ è l'area sotto la densità nell'insieme A . Nel caso vettoriale $P(X_1, X_2 \in A)$ è il volume sotto della densità nell'insieme A .

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k} \quad \left[\text{Con la osservazione (a) nel caso scolare} \right]$$

Questa prop. vale alla (A) garantisce che, ai fini della legge di $X_1, \dots, X_k$, basta conoscere in differenziale la densità o f.ue di ripartizione.

Densità marginali (essa ha dimensioni le)

$K^2_c(X, Y)$ una v.v. conosciuta con fine di densità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$

allora $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$

inoltre:

$$F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^t dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \quad e \quad f_{X_1}(t) = \frac{\partial F_{X_1}(t)}{\partial t} = f_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$f_1(x)$

Dalla congiunta si ricavano le marginali ma non sempre si può dalle marginali ricavare la congiunta e, meno che non siano indipendenti come si dice?

Esempio Mod. 4.6

p. 148

→

Caratterizzazione dell'indip. dalla (1)

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \dots \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n$$

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

0

altrove

1. Calcolare k affinché sia una densità
2. Calcolare $P(X+Y \in (0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{4}))$
3. Calcolare $F_{X,Y}(x,y)$

4. Calcolare la densità e la f.m.i. di un'ipotesi morfologica (inair?)

$$1 - \mathbb{E} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy = \int_0^1 [x^2/2 + yx]_0^1 dy = \int_0^1 (\frac{1}{2} + y) dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

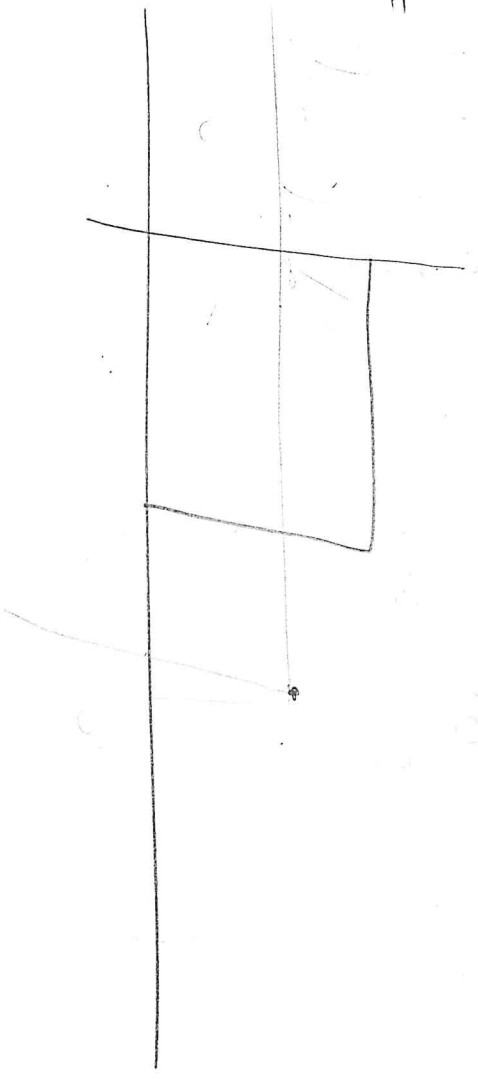
$$= k \int_0^1 (x + \frac{1}{2}) dx = k \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = k$$

$k=1$

$$2 - P(X \in (0, \frac{1}{2}), Y \in (0, \frac{1}{4})) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{4}} (x+y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (x+y) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{4}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{32} \right) dx = \left(\frac{x^2}{8} + \frac{x}{32} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$$

3 - $F(x,y) =$



$$x < 0 \quad 0 \quad y < 0$$

$$F_{xy}(x,y) = \int_0^x \int_0^y (x+y) dx dy \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

$$\int_0^x \int_0^y (x+y) dx dy \quad (x,y) \in (1+\infty) \times [0,1]$$

$$\int_0^x \int_0^y (x+y) dx dy \quad (x,y) \in [0,1] \times (1+\infty)$$

$$\int_0^x \int_0^y (x+y) dx dy \quad (x,y) \in (1+\infty) \times (1+\infty)$$

$$(a) = \int_0^x \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left(\frac{yx^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} \right) \Big|_0^y = \frac{1}{2} (xy^2 + x^2 y)$$

$$(b) \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) dx = \frac{yx^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} y(1+y)$$

$$(c) \frac{1}{2} x(1+x)$$

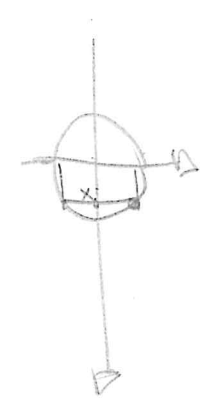
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x} & x \in (0,4) \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2} + y e^{-y} & y \in [0,1] \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

→ INSERIRE DEF. DENSITA' CONDIZIONALE [Baldi p. 88]

Esempio 4.10 Baldi $(X,Y) \sim U(\text{cerchio})$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- Calcolo di marginali
- Valore indip. tra (X,Y) - Calcolare la densità cond. di $X|Y=y$ e $Y|X=x$

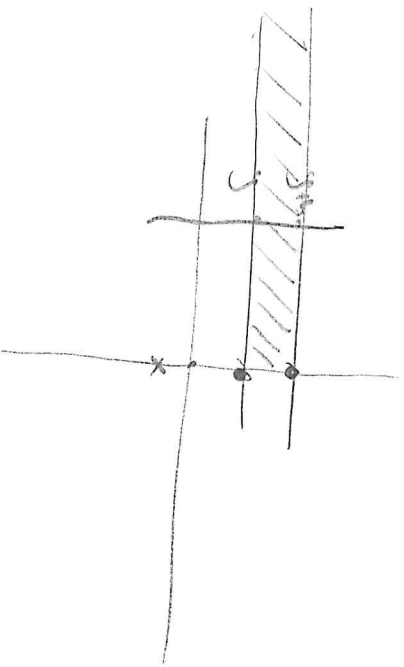
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & x \in [-1,1] \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} 0 & |y| > 1 \\ \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} & y \in [-1,1] \end{cases}$$

Conditional density of X given Y=y.

$$F_{X|Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$\begin{aligned} P(X \leq x / y \leq Y \leq y+h) &= \frac{P(X \leq x, Y \in (y, y+h])}{P(Y \in (y, y+h])} = \\ &= \frac{F_{XY}(x, y+h) - F_{XY}(x, y)}{F_Y(y+h) - F_Y(y)} \cdot \frac{h}{h} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} P(X \leq x / y \leq Y \leq y+h) &= \frac{\frac{d}{dy} F_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \\ &\stackrel{''}{=} F_{X|Y}(x|y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} F_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Indipendenza

$$\rho_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \notin [0,1] \times [0,1] \\ \frac{4}{\pi^2} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

evidente mente $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y) \quad \forall (x,y) \in \text{areale} \text{ e dunque } X \neq Y.$

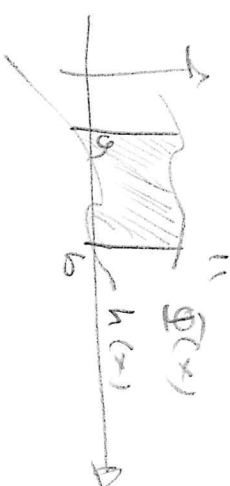
Oss Calcolo di integrali doppi
Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ e (X,Y) una v.a. in $\mathbb{R}^2$ di densità $f_{X,Y}(x,y)$

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y) dx dy$$

Caso particolare (Baldi p. 84-85)

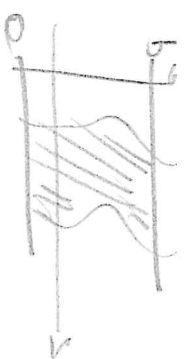
1. A normale rispetto all'asse x : $A = \{ (x,y) : a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq \Phi(x) \}$

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{h(x)}^{\Phi(x)} f(x,y) dy$$



2. A normale rispetto all'asse y : $A = \{ (x,y) : g(y) \leq x \leq \tilde{g}(y) \}$

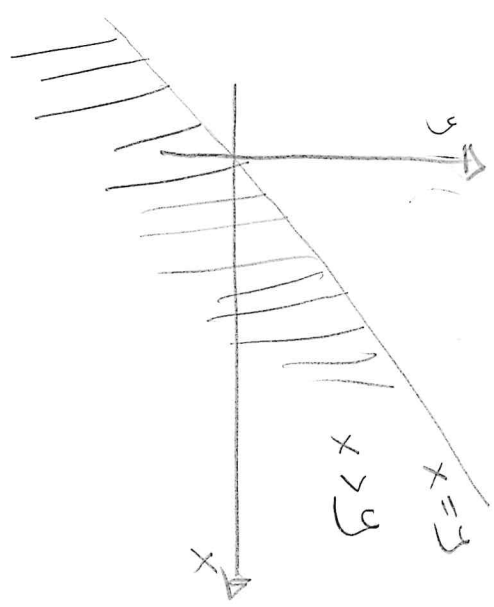
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y) dx$$



Esempio (4.12 Baldi p.85)

Due dispan.khi hanno tempi di vita $X, Y \sim \exp(\lambda)$ $Y \sim \exp(\mu)$
 Calcolare la prob. che il primo dei due sia il secondo secondo

$$\{X > Y\} = \{(X, Y) \in A\}, \quad A = \{(x, y) : x > y\}$$



$$P(X > Y) = \iint_{A \cap (\mathbb{R}^2)^+} \lambda \mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y} dx dy =$$

$$= \lambda \mu \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \int_0^x e^{-\mu y} dy = \int_0^{+\infty} \lambda \mu e^{-\lambda x} \left[-\frac{e^{-\mu y}}{\mu} \right]_0^x dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\mu x}) dx = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Es. 4.13 Balle

Due punti vengono scelti in $[0,1] \times [0,1]$ indip. e con densità uniforme. Qual è la prob. che distino per meno di $\frac{1}{4}$

Legh (vedi Bon le)

$$P(|X-Y| \leq \frac{1}{4}) = P((X,Y) \in A), \quad A = \{(x,y) : |x-y| \leq \frac{1}{4}\} =$$

$$= \int_{x-\frac{1}{4} \leq y \leq x+\frac{1}{4}}$$

$$f_{X,Y} = \int_0^1 \int_0^1 1 \cdot dx dy = 1 \quad x,y \in [0,1] \times [0,1]$$



$$P((x,y) \in A) = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_0^{x+\frac{1}{4}} dy + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} dx \int_{x-\frac{1}{4}}^{x+\frac{1}{4}} dy + \int_{\frac{3}{4}}^1 dx \int_{x-\frac{1}{4}}^1 dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} (x+\frac{1}{4}) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{2} dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 (\frac{5}{4}-x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x \right]_0^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}x \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} + \left[\frac{5}{4}x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{4}}^1 = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{15}{16} - \frac{9}{32} \right) \right) = \frac{2}{16}$$

Alternativamente

$$(X,Y) \sim U(H) \Rightarrow P((X,Y) \in A) = \frac{\text{misura}}{\text{misura}(H)} = \frac{1}{16} - \frac{2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

Oss. Sia (X,Y) una v.v. b.i. dimensionale -

È noto che $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(y|x) dy$

oppure $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) dx$

Allora la densità congiunta è

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)$$

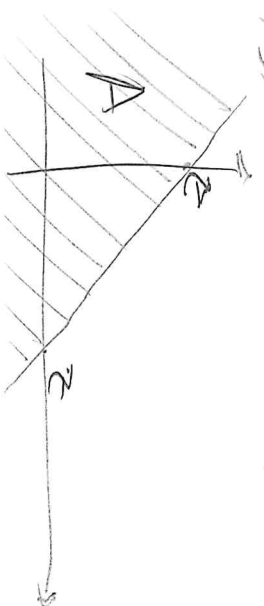
Esempio 4.20 p.83

Densità della somma $X+Y, z = z$

$$F_Z(z) = P(X+Y \leq z) = P((X,Y) \in A), A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \leq z-x\}$$

Il

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y) dy dx = \text{posto } u = y+x, du = dy$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x f_{xy}(x, u-x) du = \int_{-\infty}^0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, u-x) du \right] dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_z(z) = F_z'(z) = g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, z-x) du \end{cases} \quad g(x)$$

$$\text{Se } X \perp Y \quad f_{xy}(x, u-x) = f_x(x) f_y(u-x)$$

Esempio 4.22 p. 30 - Lept. II p. 85 Somme

REGOLA DEL CAMBIO DI VAR. NEGLI INT. MULTIPLI

$$\begin{cases} x = \alpha(u, v) \\ y = \beta(u, v) \end{cases}$$

$\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \Psi(u, v) = (\alpha(u, v), \beta(u, v))$ biettiva inv.

Domini aperti Δ, Δ' ed $\alpha, \beta \in C^1(\Delta)$

Allora

$$\iint_{\Delta'} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f \circ \Psi(u, v) du dv \quad \left| \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} \right| du dv$$

$$\Psi^{-1}(A)$$