

<u>Modelle</u>	<u>Contra</u>
----------------	---------------

- Variabili aleatorie $X, Y, \dots$. $\text{Im}(X) \subseteq \mathbb{R}$ oppure con un suo
 sottoinsieme contenuto
 - A parte alcune differenze tecniche, la teoria delle v.a. continue
 è praticamente identica a quella delle v.e. discrete.

UNION AD REPUBLIQUE

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

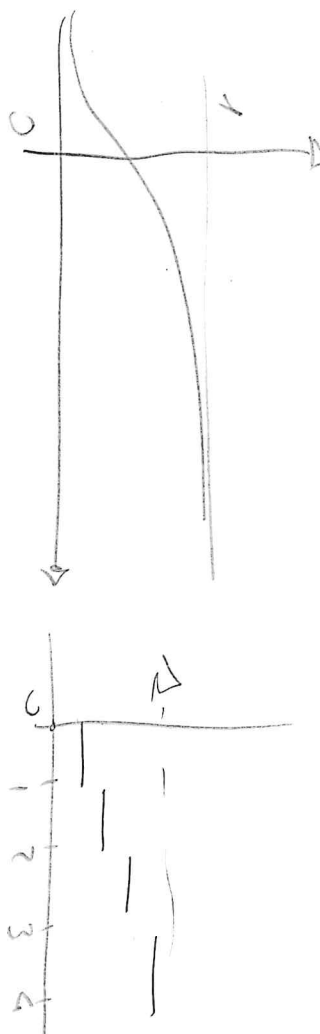
$$E_x(E) = P(X \leq E) -$$

GODE DELLE STESSE PROVER.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E} & & \mathcal{X} & & \mathcal{E} & & \mathcal{T} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & & \mathcal{H} & & \mathcal{H} & & \mathcal{H} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \downarrow \\ \pi \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ \downarrow \\ 1 \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{E} \\ \text{m} \\ \text{S} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{S} \\ \text{S} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{X} \uparrow \\ \text{S} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{X} \uparrow \\ \text{S} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{E} \\ \text{m} \\ \text{S} \end{array}$$



$$P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$$

$\frac{1}{x} \sim e^{\frac{1}{x}}$

- Se X è continua (o vero se F_X è continua)

$$(*) \quad \boxed{P(X=x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

DIFFERENZIALE F.R. CONTINUE DA
QUELLE DISCRETE PER LE QUALI $P(X=x) = P_X(x)$

$$\left[\begin{array}{l} \{X=x\} \subseteq \{x - \frac{1}{n} \leq X \leq x\} \\ P(X=x) \leq F(x) - F(x - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{per continuità} \end{array} \right]$$

Dalla (*) si deduce che $P(a < X < b) = P(0 \leq X < b) = P(0 < X \leq b) = P(0 \leq X \leq b)$

Def. Densità

X v.v. F_X funzione di ripartizione di X .

La f.ue integrabile f si dice densità di X se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

La legge di una v.v. continua (es. come per quelle discrete) è definita dalla f.ue di rip. o dalla densità. Infatti:

$$\forall [a, b] \subseteq \mathbb{R} \quad P(X \in [a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Proprietà

Se $f(t)$ è la densità di una v.v. allora:

a) $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \quad \left[F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \right]$

Come si calcola?

tramite l'integrale in un $\neq$ bracci di punti.

Nota $F'_x(x) = f(x) \quad \text{se } f \text{ è derivabile}$ Nota $f(x) = F'_x(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

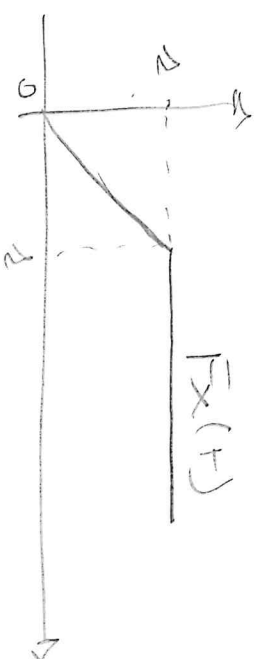
Nota uniforme in un intervallo $[0, 5]$

- Differenza dal caso discreto - Che differenza uniforme?

$$P(X \in (u, s)) \approx (s - u)$$

$$[0, 5] = [0, 1]$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \in [0, 1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$



$$P(X \in (u, s)) = F_x(s) - F_x(u) = (s - u)$$

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si può osservare su un numero finito di} \\ \text{punti.} \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\underline{[a, b]} \text{ fornisce } \quad \text{Im}(x) = [a, b]$$

$$\left. \begin{aligned} F(a) &= P(X \leq a) = 0 \\ F(b) &= P(X \leq b) = 1 \end{aligned} \right\} \quad F(s) - F(u) \approx (u-s) \quad \forall u, s \in [a, b]$$

$$F(s) - F(u) = K(u-s)$$

$$u \geq a, \quad K = b$$

$$F(b) - F(a) = K(b-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{b-a}$$

$$F(s) - F(a) = \frac{1}{b-a} (s-a) \quad s \in [a, b]$$

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Leopoldo esponenziale

densità esp. di parametro λ : $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Modella i tempi di attesa nei problemi di coda. In un arco
suo so quante volte passa continuo il ruolo e la densità promette
che nel discreto.

Memoria di memoria della distribuzione esponenziale

$$X \sim \exp(\lambda)$$

$$P(X > t+s | X > t) = \frac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

Memoria di memoria Dall'Allegato p. 87 [Se al tempo e posizione
suo sono gli stessi le leggi
delle vite restano?]]

$$Y = X - 0 \text{ se } X > 0 \text{ se } X < 0 \text{ se } X < 0 \text{ se } X < 0$$

Lege della funzione di una v.a.

X con p.r. F_X e densità f_X .
 $Y = \Phi(X)$. Come si calcola F_Y ?

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\Phi(X) \leq t) = P(\Phi(X) \in (-\infty, t])$$

$$\} \omega : \Phi(X(\omega)) \in (-\infty, t] \} = \} \omega : X(\omega) \in \Phi^{-1}(-\infty, t] \}$$

$$\Rightarrow F_Y(t) = \int_{\Phi^{-1}(-\infty, t]} f_X(x) dx$$

Esempio Lege di $Y = X^2$

$$F_Y(t) = \int_0^t ?$$

$t > 0$

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \\ &= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) \end{aligned}$$

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} F'_X(\sqrt{t}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) F'_X(-\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}} (f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t}))$$

Esempio 1 Legge di $aX + b$ data la legge di X

$$Y = aX + b$$

$$F_Y(t) = P(aX + b \leq t) \stackrel{[a > 0]}{=} P\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f_Y(t) = F'_Y(t) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$F_Y(t) = P(aX + b \leq t) = P\left(X \geq \frac{t-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f_Y(t) = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$\boxed{\text{Unifichiamo i 2 casi:}} \quad \forall a \neq 0 \quad \left| f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|$$

Def Indipendenza di v.c.

$X_1, X_2, \dots, X_m$ sono indipendenti se e solo se $\forall t_1, t_2, \dots, t_m$

$$P(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_m \leq t_m) = P(X_1 \leq t_1) P(X_2 \leq t_2) \dots P(X_m \leq t_m)$$

Ovvero se gli eventi $\{X_1 \leq t_1\}, \{X_2 \leq t_2\}, \dots, \{X_m \leq t_m\}$ sono
indip. $\forall t_1, \dots, t_m$

In generale $A \quad a_1, \dots, a_m \quad b_1, \dots, b_m \quad t = e$. $b_i \geq a_i \quad i=1, \dots, m$
 $P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_m \leq X_m \leq b_m) = P(a_1 \leq X_1 \leq b_1) \cdot \dots \cdot P(a_m \leq X_m \leq b_m)$

Anche nel caso continuo le densità compatte di v.a. indipendenti è dato dal prodotto delle densità marginali.

$X_1, \dots, X_m$ indep. $f_{X_1, \dots, X_m} = f_{X_1} \cdot \dots \cdot f_{X_m}$ dire bene
si fanno
i vettori

Esempio X, Y indipendenti $X \sim \exp(\lambda) \quad Y \sim \exp(\mu)$

Calcolare le leggi di

$$Z = \max(X, Y)$$

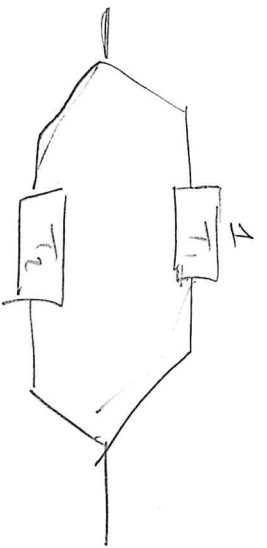
$$W = \min(X, Y)$$

Legge di Z $P(Z \leq t) = P(\max(X, Y) \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t) =$

$$F_Z(t) = P(X \leq t)P(Y \leq t) = F_X(t)F_Y(t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t})$$

$$f_Z(t) = F'_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f_X(t)F_Y(t) + f_Y(t)F_X(t) & \end{cases}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\mu t}) + \mu e^{-\mu t}(1 - e^{-\lambda t}) =$$



Componenle e le hnie in parallelo -

T_1 tempo di vita di 1
 T_2 " " 2

Il tempo di vita del sistema è

$$T = \max\{T_1, T_2\}$$

$$\begin{aligned} F_W(t) &= P(W \leq t) = P(\min(X, Y) \leq t) = 1 - P(\min(X, Y) > t) = \\ &= 1 - P(X > t, Y > t) = 1 - P(X > t)P(Y > t) = 1 - e^{-\lambda t}e^{-\mu t} = \\ &= 1 - e^{-(\lambda + \mu)t} \end{aligned}$$

$$f_W(t) = \begin{cases} (\lambda + \mu)e^{-(\lambda + \mu)t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$W \sim \exp(\lambda + \mu)$$



Componenle e le hnie in serie

Il tempo di vita del sistema è

$$T = \min\{T_1, T_2\}$$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x} &= \int_0^x e^{-y} dy \\ &= \int_0^x e^{-y} dy = 1 - e^{-x} < 1 - e^{-x-y} \\ &= 1 - e^{-x} < 1 - e^{-x-y} \end{aligned}$$

Fubini