

(vettori direzione)

Def : $X = (X_1, \dots, X_m)$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ f.c. X_i sia una v.d. discreta
 $\forall i$ si chiama v.d. m-dimensionale discreta -

- X assume solo un numero finito o numerabile di valori, essendo i valori possibili dei punti di $\mathbb{R}^m$.

- Se $x \in \mathbb{R}^m$ allora $x = (x_1, \dots, x_m)$: $x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$ e

$$\{X = x\} = \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_m = x_m\} = \{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_m = x_m\}$$

$$\{X = x\} \text{ è un evento } \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$I_m(X) = f^{(1)}(x^{(1)}) f^{(2)}(x^{(2)}) \dots f^{(m)}(x^{(m)}) \quad \text{essendo ciascuno } x^{(i)} = x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}$$

DENSITA'

$$P : I_m(X) \rightarrow [0, 1] \text{ f.c. } P(x^{(i)}) = P\{X = x^{(i)}\}$$

Proprietà

(a) $P(X^{(i)}) \geq 0 \quad \forall i$

(b) $\sum_i P(X^{(i)}) = 1$

La densità della v.c. $X = (X_1, \dots, X_m)$ è anche la densità congiunta dell'v.c. reali $X_1, \dots, X_m$.

Le densità $P_1, \dots, P_m$ delle m v.c. $X_1, \dots, X_m$ si chiamano marginali di X .

Nota P si possono calcolare $P_1, \dots, P_m$

Caso $m=2$

$X = (X_1, X_2)$ $f_m(x) = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ essendo $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$

$P_1(x) = P(X_2 = x) = P(\{X_1 = x\} \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{X_2 = x_2^{(i)}\}) =$
partizione di $\mathbb{R}$

$$\prod_i P(X_1 = x, X_2 = x_2^{(i)}) = \prod_i P(x, x_2^{(i)})$$

Analogamente

$$P_2(z) = \prod_i P(x_1^{(i)}, z) \quad \checkmark \quad \text{Fino alla fine}$$

ESERCIZIO DISTRIBUZIONI MULTINOMIALI (FACOLTATIVO)

n prove ripetute indipendenti, ponendo ogni prova dare m esiti diversi, che indicheremo con 1...m con prob. $q_1 \dots q_m$ ($\sum q_i = 1$)

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \dots, m\} \}$$

$$\# \Omega = m^n$$

Sia Y_i la variabile aleatoria che conta quante volte l'esito i si è verificato su n prove:

$$Y_i = \sum_{j=1}^n 1_{\{Y_j = i\}} \quad \text{con } Y_j = i$$

Calcolare la distr. di $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$

$$P(Y = k) = P(Y_1 = k_1, Y_2 = k_2, \dots, Y_m = k_m)$$

dove $\sum_{i=1}^m k_i = n$

$$\overline{\omega}(\underbrace{1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1}_{k_1} \underbrace{2 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2}_{k_2} \dots \underbrace{m \ m \ m \ \dots \ m}_{k_m})$$

$$P(\overline{\omega}) = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_m^{k_m}$$

Allora, come nella definizione della binomiale, si vede che la
 parola delle sequenze cui corrisponde k_i elementi di tipo i --
 e ne hanno ~~la~~ ~~ste~~ ~~e~~ la stessa

$$\Rightarrow P(Y = k) = \#(\text{tutte le sequenze}) \cdot P(\overline{\omega})$$

tutte le possibili permutazioni lunghe n di cond.
 $k_1, \dots, k_m$ di n elementi

$$\# C(k_1, \dots, k_m) \cdot P(\overline{\omega}) = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} q_1^{k_1} \dots q_m^{k_m}$$

ESERCIZIO (2.20 Baldi) p. 42 3, 16

Una con 6 palline. Se ne estraggono 2 con rimpiazzamento.

- Calcolare la legge congiunta delle v.o. (X_1, X_2) , con X_i uguale a 1 o 2.

- Stesso modello 2 estrazioni senza rimpiazzamento.

Calcolare la legge congiunta di (X_1, X_2)

- Calcolare le marginali in entrambi i casi. Notare che sono uguali.

Ne deduciamo che dalle marginali non si può dedurre la congiunta, perché con unte diversi hanno stesse marginali.

- $X_1 \dots X_m$ v.a. si dicono indipendenti se è solo se
 $\forall A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}$

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_m \in A_m) = P(X_1 \in A_1) \dots P(X_m \in A_m) \quad (1)$$

$\{X_n\}$ è una successione di v.a. indipendenti se vale (1) $\forall m \in \mathbb{N}$

Def Sia $P: \mathbb{R}^m \rightarrow [0,1]$ la densità comune di $X = (X_1, \dots, X_m)$
 e siano $P_1, \dots, P_m$ le densità di $X_1, \dots, X_m$ rispettivamente.

Allora $X_1, \dots, X_m$ sono indipendenti se e solo se

$$\forall X = (x_1, \dots, x_m) \quad P(X) = P_1(x_1) \dots P_m(x_m)$$

$$\stackrel{\text{Dim}}{(\Rightarrow)} \left[\begin{array}{c} X_1 \dots X_m \text{ indep.} \\ A_1 = x_1 \dots A_m = x_m \end{array} \right]$$

$$P(X) = P(X = x) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_m = x_m) = P_1(x_1) \dots P_m(x_m)$$

$$(\Leftarrow) \left[\forall X = (x_1, \dots, x_m) \quad P(X) = P_1(x_1) \dots P_m(x_m) \right]$$

$$A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R} \Rightarrow A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$$

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_m \in A_m) = P(X \in A) =$$

$$= \sum_{\underline{x} \in A} P(x) = \sum_{\substack{x_1 \in A_1 \\ \vdots \\ x_m \in A_m}} P_A(x_1) \cdots P_m(x_m) = \sum_{x_1 \in A_1} P_A(x_1) \cdots \sum_{x_m \in A_m} P_m(x_m) =$$

$$= P(x_1 \in A_1) \cdots P(x_m \in A_m)$$

□

- Dalle marginali si ricava la densità congiunta nel caso di indipendenza

Esempio

CASO $n=2$

Poi

Generalizzo

Sistema successo - insuccesso con prove ripetute indipendenti (Teste o croce, osservazioni con ripetizione, lancio successivi di un dado - - -) $\frac{\text{TESTA O CROCE}}{n \text{ lanci}}$ $P = P(T)$

$$\Omega = \{ \omega_1, \dots, \omega_n \} : \omega_i \in \{0, \pm 1\}$$

$\omega_i = \pm 1$ significa teste all' i -esimo lancio

$$X_i : \Omega \rightarrow \{0, \pm 1\} \quad \text{f.e.} \quad X_i(\omega) = \omega_i$$

risultato dell' i -esimo lancio

$X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti

$$P(X_i = \pm 1) = P \quad P(X_i = 0) = 1 - P \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ t.e. $X_i \in \{0, 1\} \forall i$

$k = \sum_{i=1}^n X_i$ (# degli "uno" nella sequenza)

Abbiamo visto che

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n) \Rightarrow \text{Indipendenza delle}$$

Esempio

ESTRAZIONI

SENZA RINPIAZZO

$X_1, \dots, X_n$

V PALLINE ROSSE

b --- MANEHE

X_1 = risultato della 1^a estrazione

X_2 = --- --- ~~1^a~~

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se estrazione rossa} \\ 0 & \text{--- --- bianca} \end{cases}$

$$P(X_1 = 1) = \frac{V}{V+B} \quad e \quad P(X_2 = 1) = \frac{V}{V+B}$$

[Visto come
applicazione
del teo delle
prob. totali]

$$m = P(X_3 = 1, X_8 = 2) = \frac{(12)(10)}{\binom{v+5}{2}} = \frac{v(v-1)}{(v+5)(v+5-1)} =$$

$$= \frac{v}{v+5} \cdot \frac{v-1}{v+5-1} \neq \frac{v}{v+5} \cdot \frac{v}{v+5} \quad |||$$

□

DENSITÀ CONDIZIONALE

(X, Y) sia $P(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ la densità congiunta di (X, Y) . Sia P_X la densità di X e P_Y la densità di Y

Sia $f_m(Y) = \int y_1 y_2 \dots y + \dots P_Y Y = y_1 y_2 > 0$

$$Def \quad P(x_i | y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P_Y(y_j)} \quad \text{densità cond. di } X \text{ dato } Y = y_j$$

È una buona applicazione della def. ai prob. cond.

$$\left[\frac{P(x_i, y_j)}{P_Y(y_j)} = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \right]$$

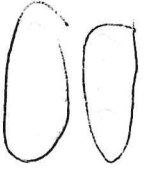
- Fissato y_j $P_{X|Y}(x_i | y_j)$ è una densità di prob.

- Se Y ed X sono indipendenti, allora $P_{X/Y}(x_i/y_j) = P_X(x_i)$

Nell'esempio precedente:

$$P_{X_2/X_1}(1/1) = \frac{P(1,1)}{P_{X_2}(1)} = \frac{\binom{r}{2} \binom{b}{0}}{\binom{r+b}{b}} \cdot \frac{1}{\frac{r}{r+b}} = \frac{r(r-1)}{(r+b)(r+b-1)}$$

$$P_{X_2/X_1}(0/1) = \frac{b}{r+b-1} \Rightarrow P_{X_2/X_1}(0/1) + P_{X_2/X_1}(1/1) = 1$$

Es. 3.46
3.46 —  fatto
desidero es. 1
3.47 parte (B)

Baldi	2.45
	2.36
	2.22