

Esempio 4 (3.20)

1 Moneta ed 1 dado vengono lanciati insieme più volte. Calcolare la prob. che la moneta dia testa prima che il dado dia 6.

Prove ripetute indipendenti essendo gli esiti possibili di una prova senza influenzare l'esito di una copia di u.a.
 $(X_1^{(i)} \quad X_2^{(i)})$:

$$X_1^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{se esce teste} \\ 0 & \text{se esce croce} \end{cases} \quad \text{all'i-esimo lancio}$$

$$X_2^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{se esce 6} \\ 0 & \text{se non esce 6} \end{cases} \quad \text{all'i-esimo lancio}$$

$$P(X_1^{(i)} = 1) = P_1(1) = \frac{1}{2} \quad \forall i \geq 1$$

$$P(X_2^{(i)} = 1) = P_2(1) = \frac{1}{6} \quad \forall i \geq 1$$

- Sia T il primo istante in cui esce testa - Allora

S è una geometria modificata di parametro $\frac{1}{6}$

- Sia T il primo istante in cui esce 6. Allora

T e una geom. mod. di parametro $\frac{1}{6}$.
Inoltre T ed S sono indipendenti.

- Cosa voglio calcolare?

$$P(S < T)$$

Il passo derivata congiunta di (T, S)

$$P_T(h) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{h-1} & h \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P_S(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

II Passo

Indipendente:

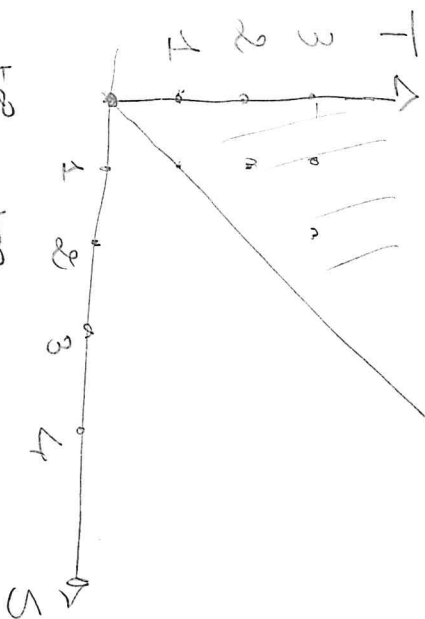
$$P_{T,S}(u, w) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{u-1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{u-1} \quad u, w \geq 1$$

$$(S < T) = \bigcup_{u \in \{S=u, T > u\}}$$

III Passo

$$P(S < T) = P((T, S) \in A)$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{I}_m \times T, S \} + \dots \quad x > y$$



$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{5}{6} \right)^k$$

$$\frac{1}{6} \frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-k-1}$$

$$= \frac{5}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12} \right)^{k-1} = \frac{5}{12} \frac{1}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{5}{7}$$

Prop.

Siano (U, V) var. a due loci discrete e sia P la loro densità congiunta. Allora la densità della v.a. U, V , che individua con g , è data da

$$g(z) = \sum_i P(u_i, z - u_i)$$

dove se $f(u) = f(u_1, u_2, \dots)$

$$f_m(V) = f(v_1, v_2, \dots)$$

$$f_m(u+v) = f(u_i + v_j) \quad i \geq 1, j \geq 1$$

L^2 è applicabile per determinare la somma di 2 basi indip. e la somma di 2 poss. indip.

* Se sono indip. allora più semplice:

$$g(z) = \sum_i P_u(u_i) P_v(z - u_i)$$

Dimostrare!
 $\begin{cases} X+Y=z \\ u_i = u_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=u_i \\ Y=z-u_i \end{cases}$

Esempio X, Y indipendenti (Vedere Esempio 2.1.1)

$$X \sim B(n, p) \quad Y \sim B(m, p)$$

$$\Rightarrow X+Y \sim B(n+m, p)$$

marginale $P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k \geq 0$

$$P_Y(l) = \binom{m}{l} p^l (1-p)^{m-l} \quad l \geq 0$$

congiunte

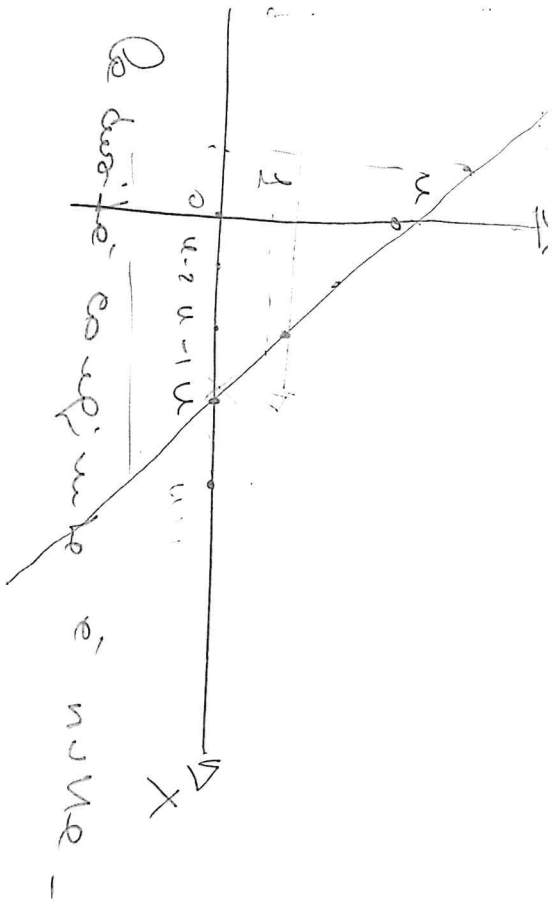
$$P_{(X,Y)}(k, l) = \sum_0 \binom{n}{k} \binom{m}{l} p^{k+l} (1-p)^{n+m-(k+l)} \quad k, l \geq 0$$

Densità di $X+Y$

è binomiale

$$P(X+Y=u) = P((X,Y) \in A)$$

$$A = \{(x,y) : x+y=u\} = \{(x,y) \in I_n \times I_m : y = u-x\}$$



$$\sum_{k=0}^u p(x|y)(k, u-k) = \sum_{k=0}^u \binom{n}{k} \binom{m}{u-k} p^{k+(u-k)} (1-p)^{n+m-u}$$

$$= p^u (1-p)^{n+m-u} \sum_{k=0}^u \frac{\binom{n}{k} \binom{m}{u-k}}{\binom{n+m}{u}}$$

1

ES. 1,55 e 1,58 pag 24-25 Alasudo

1.60

Exercise U, V indep. $U \sim P(\lambda)$ $V \sim P(\mu)$

$$P_U(u) = \frac{\lambda^u}{u!} e^{-\lambda} \quad u \geq 0$$

$$P_V(v) = \frac{\mu^v}{v!} e^{-\mu} \quad v \geq 0$$

$$P_{U+V}(u) = \sum_{u \geq 0} P_U(u) P_V(u-u) =$$

$$= \sum_{u=0}^u \frac{\lambda^u}{u!} \frac{\mu^{u-u}}{(u-u)!} e^{-\lambda} e^{-\mu} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{u!} \sum_{u=0}^u \frac{u!}{u!} \lambda^u \mu^{u-u}$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)^u}{u!} e^{-(\lambda+\mu)}$$

BIBLIOGRAPHY D1 NEWTON $(e+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^k x^{n-k}$

Lezione 7 bis

(DISTRIBUTIONS MAX E MIN)

Esempio 3.25

Si lanciano contemporaneamente 2 monete
fino a che entrambe non abbiano dato
testa almeno una volta.

Calcolare le prob. che servano esattamente

lancei-

P prob. che la 1^a moneta dia testa
r -- -- --

T u.s. che con la 1^a mon. di lanci pare
la prima moneta dia testa

S -- --

T N geom. mod. (P)

S ~ -- -- (r)

Come si esprime, in termini di T ed S,
l'evento di cui vogliamo calcolare la
prob?

Si esauriscono le coppie $(1, k), (2, k), \dots, (k, k)$
 $(k, 1), (k, 2), \dots$

$$Z = \max(S, T)$$

- Il problema generale è il calcolo delle densità del $\max$ tra 2 v.a. -
 Calcolare le p.m.f. di ripartizione; infatti

$$f(\max(S, T) \leq k) = \{S \leq k, T \leq k\}$$

e se, come nel nostro caso, S, T sono indipendenti

$$F_Z(k) = P(Z \leq k) = P(S \leq k) P(T \leq k) = F_S(k) F_T(k)$$

- Nel caso in esame, $P_S(k) = P(1-p)^{k-1}$ $P_T(m) = r(1-r)^m$

$$\Rightarrow F_S(k) = \sum_{i=1}^k P(1-p)^{i-1} = 1 - P(1-p)^k$$

$$= 1 - (1-p)^k$$

Analogamente:

$$F_1(u) = 1 - (1-r)^u$$

Per tanto:

$$\begin{aligned} F_2(u) &= [1 - (1-p)^u][1 - (1-r)^u] = \\ &= 1 - (1-p)^u - (1-r)^u + (1-p)^u(1-r)^u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(Z=u) = F_2(u) - F_2(u-1) =$$

$$\begin{aligned} &= \cancel{1} - (1-p)^u - (1-r)^u + (1-p)^u(1-r)^u - \\ &\quad - \cancel{1} + (1-p)^{u-1} + (1-r)^{u-1} + (1-p)^{u-1}(1-r)^{u-1} \end{aligned}$$

→
Nello stesso ambito, vogliamo calcolare la prob. che
occorre no u lanci perche almeno 1 delle monete
di è testa-

Questo evento contiene le coppie $(u, u), (u, u+1), (u, u+2), \dots$
 $(u+1, u), (u+2, u), \dots$

$$Y = \min(T, S)$$

- Si calcola la prob. dell'evento $\{Y > k\}$ - Infatti

$$\{Y > k\} \equiv \{S > k, T > k\}$$

$$P(Y > k) = P(S > k) P(T > k) = (1-p)^k (1-r)^k$$

$$\Rightarrow F_Y(k) = P(Y \leq k) = 1 - P(Y > k) = 1 - (1-p)^k (1-r)^k$$

$$\Rightarrow P_Y(k) = 1 - (1-p)^k (1-r)^k - \cancel{1} + (1-p)^{k-1} (1-r)^{k-1} =$$

$$= [(1-p)(1-r)] \sum_{k=1}^{k-1} (1-p)^{k-1} (1-r)^{k-1}$$

$[Y \sim \text{Geom mod di par. } (1-p)(1-r)]$

VAX AD

FSEBIO

148/1000
ABUW



EN 2002