

Distribuzione GEOMETRICA (Lez. V)

- Schema successo - insuccesso con prove successive, indip.
- Lancio di monete come nell'es. precedente

$T =$ numero dei lanci necessari per ottenere testa la prima volta

$P(T = k)$?

$$X_k = \text{numero di teste su } k \text{ lanci} \mid \begin{cases} X_k = 0 \end{cases} = \{T > k\}$$

$$X_k \sim B(k, p) \Rightarrow P\{T > k\} = P\{X_k = 0\} = \binom{k}{0} p^0 (1-p)^k = (1-p)^k$$

A noi interessa le densità di T , ovvero la funzione

$$\{T = k\} \cup \{T > k\} = \{T \geq k\}$$

$$\{T = k\} \cap \{T > k\} = \emptyset \text{ in quanto } \{T > k\} = \bigcup_{I \geq k+1} \{T = I\}$$

Per tanto

$$P(T=k) + P(T>k) = P(T \geq k)$$

$$P(T=k) = P(T \geq k) - P(T > k) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1} \quad k \geq 1$$

In generale diremo che X segue una distribuzione geometrica di par. p se ha densità $L(x)$

$$P(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k=1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

X segue una geom. mod. discreta se ha densità

$$P(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k=1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

←

T ha legge geometrica mod. discreta

$T-1$ ————— geometrice

Esempio Nel lancio successivo di un dado, qual è la prob. che occorrono esattamente k lanci per ottenere 6?

- Prove successive indipendenti

- Successo = l'essere 6

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{6}}$$

$T = \#$ lanci per ottenere 6 seppur
una legge geometrica no di Grete
di var. $\frac{p}{q}$

$$\left[\begin{aligned} P(T=k) &= \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} \end{aligned} \right]$$

verifica propr. della densità

TEMA CANALE DI RITORNA DALLA DISTRIBUZIONE GEOMETRICA
(e Geom. mod.)

Sia X geometrica mod. l'evento di par. p

$$P(X = m + k / X \geq k) = P(X = m)$$

$$\frac{P(\{X = m+k\} \cap \{X > k\})}{P(X > k)} = \frac{P(X = m+k)}{P(X > k)} \quad (*)$$

$$m = \sum_{j=k}^{+\infty} P(1-p)^{j-k} = (1-p)^k \sum_{j=k}^{+\infty} P(1-p)^{j-k}$$

$$\stackrel{s=j-k}{=} (1-p)^k \sum_{s=0}^{+\infty} (1-p)^s = \frac{1}{1-(1-p)} \cdot (1-p)^k \cdot p^2$$

$$= (1-p)^k$$

$$\text{Allora } (*) = \frac{P(1-p)^{m+k-1}}{(1-p)^k} = P(1-p)^{m-1} = P(X=m)$$

[Per esercizio usare la distr. geometrica]

Esempio (Perché mancanza di memoria?)

In uno schema que. ind. aggiungiamo di non aver ottenuto successi nelle prime k prove - Calcolare la prob. di dover attendere ancora m prove:

$$P(T = k+m \mid T > k) = P(T-1 \geq k+m-1 \mid T-1 \geq k-1)$$

$$\text{con } T-1 \text{ geometrica} = P(T-1 \geq k+m-1 \mid T-1 \geq k)$$

$$= \frac{p(1-p)^{m+k-1}}{(1-p)^k} = p(1-p)^{m-1} p(T-1=m) = p(T=m)$$

Orvvero è la stessa prob. che si avrebbe ricominciando
 le prove senza tener conto dei primi k lanci

SE RISULTA TEND. ES. 3.4 baldi p. 80
 3.4 baldi nero.

Distribuzione di Poisson di parametro λ

È la distribuzione su $0, 1, \dots$ la cui densità è data

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x \in \mathbb{N}$$

alimenti

Richiamo $\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda \right]$ serie di Taylor e dunque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n) = e^\lambda \cdot e^{-\lambda} = 1$$

- Quali s.a. descrive? È in realtà una buona approssimazione delle s.a. che descrivono il numero di successi quando il numero di prove è molto elevato e la prob. di successo molto piccola. In tal caso infatti approssimiamo la legge Binomiale.

- Poisson come limite di Potenziati

$$X \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$$

$$P(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot n}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 $e^{-\lambda}$
 limite notevole

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$X \sim B(n, p) \approx P(n, p)$$

se p è molto piccolo

Esempio (Hod è sul libro)

Lo 0,1 % della produzione di fogli di compensato presenta imperfezioni evidenti.

Un falegname ne ordina 5000 pezzi. Calcolare le probabilità che 50 pezzi siano difettosi.

$$X \sim B(5000, \frac{1}{1000}) \quad \text{per tanto} \quad 10.000 - 50$$

$$P(X=50) = \binom{5000}{50} \left(\frac{1}{1000}\right)^{50} \left(\frac{999}{1000}\right)^{10000-50}$$

impossibile da calcolare

Uso l'approssimazione Poissoniana.

$$X \sim P(n \cdot p) = P(5000 \cdot \frac{1}{1000}) = P(5)$$

$$P(X=50) \sim e^{-5} \frac{5^{50}}{50!}$$

Esempio = # telefonate che arrivano ad un centralino in un certo periodo di tempo quando il numero dei possibili utenti è molto elevato e la prob. che ciascun utente chiami è molto piccola, risultando ogni utente indipendente.

Def (V. v.d.)

Dato la v.v. X si chiama f.ne di ripartizione di X la funzione

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \quad \text{f.c.} \quad F_X(t) = P(X \leq t)$$

Proprietà

$$\textcircled{1} F(t) \leq F(s) \quad \forall t \leq s \quad \left[\begin{array}{l} X \leq t \\ \text{se} \\ X \leq s \end{array} \right]$$

$$\textcircled{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$$

Relazione tra densità e funzione di ripartizione

Dall'una si ottiene l'altra

$$[F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x \leq t} p(x)]$$

$$(-\infty, x] = (-\infty, y] \cup (y, x]$$

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{aligned} \text{Se } x \in \bigcup_{y < x} (X) &\Rightarrow F(x) - F(y) = P(X \leq x) - P(X \leq y) = \\ \text{allora } \forall y < x &= P(y < X \leq x) \end{aligned}} \end{aligned}$$

inoltre se X è discreta e prende i valori successivi:

$$(z, x) \quad \text{---} \quad \overset{x}{*}$$

$$(-\infty, x] = (-\infty, z] \cup (z, x]$$

$$F(x) = F(y) + \underbrace{P(z < X \leq x)}_{p''(x)}$$

Sceglio $y \in (z, x]$ e allora

$$P(y < X \leq x) = P(X = x) = p(x)$$

Esempio F.m. di rip. di una v.a. uniforme su $[0, 1]$

$$p(x) = \frac{1}{7} \quad \forall \quad x \in [0, 1]$$

- Prendiamo i valori in successione 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

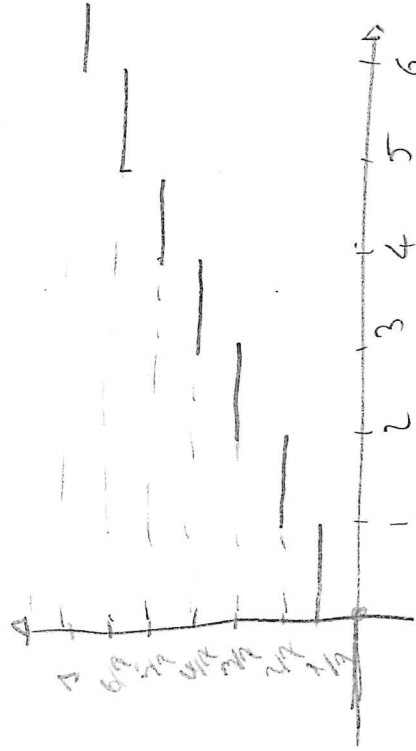
$$t < 0 \quad F(t) = 0$$

$$0 \leq t < 1 \quad F(t) = P(0) = \frac{1}{7}$$

$$1 \leq t < 2 \quad F(t) = P(X \leq t) = P(0) + P(1) = \frac{2}{7}$$

$$5 \leq t < 6 \quad F(t) = P(0) + \dots + P(5) = \frac{6}{7}$$

$$t \geq 6 \quad F(t) = P(X \leq t) = 1$$



X caso fine di ripartizione di $B(6, 1/2)$

Se resta fermo al fe-

3.2 r.34

Esercizio $P. 33 = (2.77) P. 85 \underline{\underline{BALDI}}$

1.34

3.23

(2.41) BALDI
a,b