

Estensione della definizione di indipendenza ad un numero qualunque di eventi:

Def Gli eventi $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ sono indipendenti se $\forall k \leq n$,
 $\forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \quad P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

Osserva che non basta $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$

ESEMPIO (Dall'Alpiu, pag. 53 E. 7.1)

- Lancio di 3 monete regolari
 $A_1 = \{ \text{almeno 2 teste} \}$ $A_2 = \{ \text{un numero pari di teste} \}$
 $A_3 = \{ \text{croce al primo lancio} \}$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P\{C, T, T\} = \frac{1}{8}$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2} \quad \text{[Per esercizio]}$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$MA: \{A_1 \cap A_2\} = \{ (T, T, C), (C, T, T), (T, C, T) \}$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4}$$

Siano dati 2 insiemi finiti N K tali che

$$\#N = n$$

$$\#K = n$$

Sia inoltre $n \leq n$ -

Richiami

$$f: K \rightarrow N \text{ e inoltre se } x, y \in K: x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Def - Si chiama disposizione di n elementi di classe K una applicazione $f: K \rightarrow N$ -

- Ogni disposizione e dunque una sequenza ordinata di n degli elementi dati -

- Ogni disposizione contiene dunque tutti elementi diversi tra loro (iniettività) ed inoltre 2 disposizioni diverse non tra loro o perché contengono almeno 1 elemento diverso, o, se contengono gli stessi elementi, per l'ordine nel quale si presentano -

Prop Sia D_n l'insieme delle disposizioni

di n elementi di classe K -

$$\# D_n^u = \frac{n!}{(n-u)!} \quad \text{L'USHER course}$$

Esempio di applicazione

Quanti sono i numeri di 3 cifre tutte diverse tra loro?

0, 1, ..., 9

Conta l'ordine - Va bene D_3^0 ? No! / devo sapere la cardinalità delle disposizioni che combinano per 0 -
Quante sono? D_3^0

$$\Rightarrow D_3^0 - D_2^0 = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{7!} = 8 \cdot 8 \cdot 0 - 8 \cdot 8 = 648$$

D_n^u che è



Se $n=u$ ottengo l'insieme delle permutazioni di n elementi -
La cardinalità delle permutazioni è dunque

$$\boxed{\# D_n^u = n!}$$

Def Si chiama combinazione di n elementi di classe k un sottoinsieme di cardinalità k degli n elementi dati.

- In diciamo con C_k^n l'insieme delle combinazioni di n elementi di classe k .

$$\text{Prop } \# C_k^n = \frac{\# D_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Questo risultato si ottiene considerando che ogni combinazione si può disporre in $k!$ disposizioni differenti ciascuna ottenuta da un diverso ordinamento dei k elementi. (Ogni combinazione individua $k!$ disposizioni)

Esercizio: Giochi del lotto -

Si giocano 5 numeri

- Calcolare la probabilità di fare 2 cinque

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Semplice

Si spiega la

In questo spazio e le ho mettere la descrizione uniforme, perché e le ho pensare che tutte le sequenze discrete e ordinate di 5 elementi siano equiprobabili.

Quindi, supponendo di aver giocato $(1, 2, 3, 4, 5)$ la risposta
alle domande 1 e

$A = \{ \text{risposta sempre } 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$$P(A) = \frac{1}{\# D_5^{30}} = \frac{(30-5)!}{30!} = \frac{85!}{30!} = \frac{1}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}$$

$B = \{ \text{esce un numero } 4, 3, 3, 4, 5 \}$

$B = \{ (\omega_1, \dots, \omega_5) : \omega_i \neq \omega_j \text{ } \omega_i \in \{1, \dots, 5\} \forall i \}$

$$\# B = 5!$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{\# B}{\# D_5^{30}} = \frac{\# D_5^5}{\# D_5^{30}} = \frac{5! (30-5)!}{30!} =$$

$$= \frac{1}{\binom{30}{5}} = \frac{1}{\# C_5^{30}}$$

2) Per vis pensare alla II^a domanda, avremmo potuto
considerare lo spazio

$\Omega_2 = C_5^{30}$ dei sottoinsiemi di classe di 5 elementi.

In questo spazio Ω coincide con l'evento elementare
 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e dunque

$$\#(B) = 1 \quad \text{e} \quad P(B) = \frac{\#}{30} \quad \text{stesso risultato}$$

Esempio 2 (compleanno) [Se non c'è TEMPO, per caso]

Qual è la probabilità che tra n persone scade a caso
 almeno 2 persone il compleanno lo stesso giorno?

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \dots, 365\} \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

$$\# \Omega = 365^n \quad (\text{sequenze ordinarie} \Rightarrow (1, 2, 3, \dots) \in (2, 1, 1, \dots))$$

$$A = \{\text{almeno 2 persone festeggiano il compleanno lo stesso giorno}\} \\ = A_2 \cup \dots \cup A_n$$

A_i = esattamente i persone festeggiano il compleanno
 lo stesso giorno $i = 1, \dots, n$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \Rightarrow P(A) = P(A_2) + \dots + P(A_n) =$$

$$= \frac{\#A_2}{365^n} + \dots + \frac{\#A_n}{365^n}$$

Vale la pena? È molto più semplice contare qu...

$A^c = \{ \text{nessuna, tra le } n \text{ persone, festeggia il compleanno lo stesso giorno} \}$

$\text{Stesso giorno } \mathcal{L} = \{ (w_1, \dots, w_n) : w_i \neq w_j \forall i \neq j \}$

$= \Delta_{365}^{365} = \text{insieme delle disposizioni di } 365 \text{ oggetti di classe } w -$

Allora $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\Delta_{365}^{365}}{365^n} = 1 - \frac{(365 \cdot \dots \cdot 365 - n + 1)}{365^n}$

Distribuzione ai prob.

È sempre 3 | Legge ipergeometrica - (Modello di estrazione da un'urna

senza rimpiazzo)

Abbiamo un'urna con b palline bianche ed r rosse -

Procediamo ad una estrazione senza reimmissione di

n palline

$$n \leq b+r$$

Qual è la prob. che esattamente

rosse?

$$k \leq r$$

$$n-k \leq b$$

$$n-b \leq k \leq r$$

Procediamo in 2 passi: nomi

siano

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ IPERGEOMETRICA (Baldi p. 17)

Sia data un'urna contenente b palline bianche ed r rosse. Si effettuano n estrazioni senza rimpiazzo.

Qual è la probabilità di estrarre esattamente k palline rosse?

Vinculi:

$$\begin{cases} w \leq b+r \\ k \leq n, \quad k \leq r \Rightarrow k \leq \min(n, r) \\ n-k \leq b \Rightarrow k \geq n-b \end{cases} \quad \begin{cases} n \leq b+r \\ \text{inferiore } n-b \leq k \leq \min(n, r) \end{cases}$$

$-2 = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \neq \omega_j \text{ vice } i \in \underbrace{1, \dots, r}_r, \underbrace{b+1, \dots, b+r}_b\}$
Si può procedere in 2 modi:

1 - I punti di -2 possono essere posti in corrispondenza ad un'urna con le seguenti ordinate lunghe n di $b+r$ elementi distinti ed in questo caso $\# -2 = \# D_n^{b+r}$

2 - I sottoinsiemi di cardinalità n di $b+r$ elementi distinti
 $\Rightarrow \# -2 = \# C_{b+r}^n$

Scego come spazio campionario lo spazio degli combinazioni,

ECCITO PERCORSO IL PROBLEMA IN ESATTO NON DIPENDE
DALL'ORDINE DI ESTRAZIONE

DE SI POTREVA SCEGLIERE ANCHE Δ_n^{b+r} .

$$\# \Omega \equiv \binom{b+r}{n}$$

I possibili sottoinsiemi di cardinalità n sono
equiprobabili; pertanto su Ω molto la distr. uniforme

$$\# \Omega = \binom{b+r}{n}$$

$A_k = \{ \omega : \omega \text{ contiene esattamente } k \text{ elementi rossi} \}$

$$\# A_k = ?$$

| punti in A_k sono i sottoinsiemi che hanno k palline
rosse ed $n-k$ bianche. Quanti sono questi sottoinsiemi?

Per ogni sottoinsieme di cardinalità k di $\{1, \dots, r\}$
se ne trovano $\binom{r}{k}$ di $\{1, \dots, b\}$. Ovvero:

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \frac{\# A_k}{\# \Omega} = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} \\ &= \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} \end{aligned}$$

Al vanire di n P definire una distribuzione di
probabilità su $\{ \max(0, n-5), \min(n, r) \}$ chiama la
distribuzione ipergeometrica -

Es. sem pio

totalmente

Chiedo al loto 80 a cosa 3, 4, 22 -
Quel è la prob. di fare terno?

5 estrazioni di 90 palline

Le 90 palline possono essere divise in
2 gruppi di 45 (come a urna con 2
colori)

1 3, 4, 22 } 1 1, 2, 5, 6 - - - 90 }

$A = \{ \text{Pescio bruno} \} = \text{Affresco tutti e 3 gli}$
 $\text{elementi del primo gruppo e 2 elementi 2}$
 nel secondo

Silvia non perdane con $h = 3$ o $v = 87$
 $n = 90, u = 3$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{3}{3} \binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}$$

11 e 15. con | $\omega_1 = 1 (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \neq \omega_j, \omega_i \in \{ \underbrace{\omega_1, \dots, \omega_p}_p, \underbrace{\omega_{p+1}, \dots, \omega_n}_k \}$

$$\# \Omega_1 = D_n^{br} = \frac{(b+r)!}{(n+(b+r))!}$$

Consideriamo l'evento $A'_k = \{k \text{ palline rosse alle prime } k \text{ estrazioni}\} = \{(\omega_1, \dots, \omega_k, b_{\Sigma 1}, \dots, b_{\Sigma(n-k)})\}$

$$P(A'_k) = ?$$

Quante sono le sequenze che hanno k palline rosse nei primi k posti e $(n-k)$ palline bianche nelle posizioni rimanenti?

$$\begin{aligned} & r(r-1) \dots (r-k+1) \cdot b(b-1) \dots (b-(n-k)+1) = \\ & = \frac{r!}{(r-k)!} \cdot \frac{b!}{(b-(n-k))!} \sim \# \sum_{k=0}^r \sum_{n-k}^b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A'_k) = \frac{r!}{(r-k)!} \cdot \frac{b!}{(b-(n-k))!} \cdot \frac{(b+r)!}{(n+(b+r))!}$$

It's quite the prob. dell'evento A - evento esatto numero...

Contengono esattamente k pelli rosse:

$A = \cup A_{i_1, \dots, i_k}$ dove $\{i_1, \dots, i_k\}$ è l'insieme composto degli indici che corrispondono alle posizioni delle pelli rosse. Tali eventi sono

disgiunti tra loro perché probabili in un solo modo. Per la legge di addizione delle probabilità si ha:

$$\Rightarrow \frac{w!}{u! (n-u)!}$$

$$\Rightarrow P(\text{esattamente } k \text{ rosse}) = \frac{n!}{u! (n-u)!}$$

$$\cdot P(A^c_k) =$$

$$= \frac{n!}{u! (n-u)!} \cdot \frac{v!}{(v-u)!} \cdot \frac{b!}{(b-(n-u))!} = \frac{\binom{v}{u} \binom{b}{n-u}}{\binom{b+v}{n}}$$

All'avere di $k=0, \dots, w$ definire una legge di probabilità.