1 Esercizi d' esame sulle variabili aleatorie continue

Esercizio 1.1. *(II eso 16)*
Sia X una variabile aleatoria con densità

$$\left\{ f(x,\theta) = \frac{2\theta}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x^2}} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x),\ \theta > 0 \right\}$$

(i) Calcolare la legge della v.a. $Y = \frac{2\theta}{X^2}$ e la probabilità dell' evento $\{Y \in [4,8]\}$ sapendo che $\{Y > 2\}$;
(ii) Sia Z una v.a. indipendente da Y e con stessa legge di Y. Calcolare $P(Y \leq Z \leq 2Y+1)$;
(iii) Calcolare $E[Y+Z^2]$ e $Cov(Y-3Z,Z)$.

(i) $Im(Y) = (0,+\infty)$ e dunque se $t \geq 0$

$$\begin{aligned} F_Y(t) =& P(Y \leq t) = P\left(\frac{2\theta}{X^2} \leq t\right) = P\left(X \geq \sqrt{\frac{2\theta}{t}}\right) = \\ =& 1 - F_X\left(\sqrt{\frac{2\theta}{t}}\right) \end{aligned}$$

Pertanto

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ f_X\left(\sqrt{\frac{2\theta}{t}}\right) \frac{1}{2t}\sqrt{\frac{2\theta}{t}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Pertanto $Y \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(Y \in [4,8] | Y > 2\right) =& \frac{P\left(Y \in [4,8]\right)}{P\left(Y > 2\right)} = \frac{F_Y(8) - F_Y(4)}{1 - F_Y(2)} = \\ =& \frac{-\exp(-4) + \exp(-2)}{\exp(-1)} = \exp(-1) - \exp(-3). \end{aligned}$$

(ii) Y e Z sono indipendenti e dunque la densità congiunta si fattorizza nel prodotto delle densità marginali. Pertanto

$$\begin{aligned} P(Y \leq& Z \leq 2Y+1) = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}dy \int_y^{2y+1} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}dy \int_y^{2y+1} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}\left[e^{-\frac{1}{2}y} - e^{-\left(y+\frac{1}{2}\right)}\right]dy = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-y}dy - \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{3}{2}y}dy = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(iii)
$$E(Y + Z^2) = E(Y) + Var(Z) + E(Z)^2 = 2 + 4 + 4 = 10$$

$$\begin{aligned} Cov(Y - 3Z, Z) =& E(YZ - 3Z^2) + E(Y - 3Z)E(Z) = \\ =& E(Y)E(Z) - 3E(Z^2) + [E(Y) - 3E(Z)]E(Z) = \\ =& 4 - 3 \times 8 - 4 \times 2 = -28. \end{aligned}$$

Esercizio 1.2. *(II eso 16)*
Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}xy & \text{se } 0 < y < x < 2; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità di X e Y e calcolare $Cov(X, Y)$.
(ii) Trovare la densità condizionale di X dato $Y = 1$ e calcolare $E[X|Y = 1]$.
(iii) Trovare la densità della variabile aleatoria $Z = \frac{Y}{X}$ e determinarne media e varianza.

(i) Si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin (0, 2); \\ \int_0^x \frac{1}{2}xydy = \frac{x^3}{4} & \text{se } x \in (0, 2). \end{cases}$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin (0, 2); \\ \int_y^2 \frac{1}{2}xydx = y - \frac{y^3}{16} & \text{se } y \in (0, 2). \end{cases}$$

Pertanto, X e Y non sono indipendenti, in quanto, ad esempio $0 = f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ per ogni $0 < x < y < 2$.

$$E(X) = \int_0^2 \frac{x^4}{4}dx = \frac{x^5}{20}\Big|_0^2 = \frac{8}{5}.$$

$$E(Y) = \int_0^2 \left(y^2 - \frac{y^4}{16}\right) dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{80}\right)\Big|_0^2 = \frac{544}{640} = \frac{34}{15}.$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^2 dx \int_0^x \frac{1}{2}x^2y^2dy = \int_0^2 \frac{1}{6}x^5dx = \\ &= \frac{1}{36}x^6\Big|_0^2 = \frac{64}{36} = \frac{16}{9} \ . \end{aligned}$$

Infine $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{16}{9} - \frac{8}{5}\frac{34}{15} = \frac{400-816}{225} = -\frac{416}{225}$.

(ii)
Ricordiamo che la densità condizionata di X dato Y ha la seguente espressione $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$. Con i dati del problema ne deriva che

$$f_{X|Y}(x|1) = \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{1}{16}}\mathbb{I}_{(1,2)}(x) = \frac{8}{15}x\mathbb{I}_{(1,2)}(x).$$

Inoltre

$$E[X|Y=1] = \int_1^2 \frac{8}{15}x^2 dx = \frac{8}{45}x^3\Big|_1^2 = \frac{56}{45}.$$

(iii) Calcoliamo la funzione di ripartizione della v.a. Z. A tale proposito, si noti che $Im(Z) = (0,1)$ e quindi $F_Z(z) = 0$ se $z \leq 0$ e $F_Z(z) = 1$ se $z \geq 1$. Per $z \in (0,1)$

$$F_Z(z) = P\left(\frac{Y}{X} \leq z\right) = P(Y \leq zX) = P((X,Y) \in F)$$

dove $F = \{(x,y) : 0 < x < 2, 0 < y < zx\}$. Esplicitamente

$$F_Z(z) = \int_0^2 dx \int_0^{zx} \frac{1}{2}xydy = \int_0^2 \frac{z^2}{4}x^3 dx = z^2.$$

Di conseguenza la densità ha l'espressione

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \notin (0,1); \\ 2z & \text{se } z \in (0,1). \end{cases}$$

Infine

$$E[Z] = \int_0^1 2z^2 dz = \frac{2}{3}, \quad E[Z^2] = \int_0^1 2z^3 dz = \frac{1}{2}$$
$$Var(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Esercizio 1.3. *(II eso 15)*
Sia X una variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $(a, a+1)$ e sia

$$Y = -\frac{1}{\alpha}\ln(X-a),$$

con $a > 0, \alpha > 0$.
(i) Calcolare la legge della v.a. Y *e la probabilità dell' evento* $\{Y \leq \frac{2}{\alpha}\}$ *sapendo che* $\{Y > \frac{1}{\alpha}\}$
(ii) Calcolare $E(X+Y)$ *e* $P(Y^2 > 9)$.
(iii) Calcolare la legge della v.a. $Z = [2Y] + 1$, *avendo indicato con* $[x]$ *la funzione parte intera di* x*; si tratta di una densità nota?*

(i) $Im(Y) = (0, +\infty)$ e dunque se $x \geq 0$

$$P(Y \leq x) = P\left(-\frac{1}{\alpha}\ln(X-a) \leq x\right) = P\left(\ln(X-a) \geq -\alpha x\right) =$$

$$P\left(X \geq \exp(-\alpha x) + a\right) = \int_{\exp(-\alpha x)+a}^{a+1} dx = a+1-(\exp(-\alpha x)+a) = 1-\exp(-\alpha x)$$

ovvero

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ 1 - \exp(-\alpha x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Pertanto $Y \sim Exp(\alpha)$.
Quindi, per la mancanza di memoria della legge esponenziale, oppure calcolando direttamente, si ha:

$$P\left(Y \leq \frac{2}{\alpha} | Y > \frac{1}{\alpha}\right) = P\left(Y \leq \frac{1}{\alpha}\right) = 1 - \exp(-1).$$

(ii)

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}$$
$$P(Y^2 > 9) = P(Y > 3) = \exp(-3\alpha).$$

(iii) Si noti che $Im(Z) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$\{Z = k\} = \{[2Y] = k-1\} = \left\{\frac{k-1}{2} \leq Y < \frac{k}{2}\right\}$$

e di conseguenza Z ha densità

$$\begin{aligned} p_Z(k) =& P\left(\frac{k-1}{2} \leq Y < \frac{k}{2}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{2}k\right) - 1 + \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(k-1)\right) = \\ =& \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^{(k-1)} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

ovvero Z ha una legge geometrica modificata di parametro $1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Esercizio 1.4. *(II eso 15)*
Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 15x^2y & \textit{se } 0 < x < y < 1; \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità di X e Y e calcolare $Cov(X,Y)$.
(ii) Calcolare $P(Y - 4X < 0)$.
(iii) Trovare la densità condizionale di X dato $Y = \frac{1}{2}$ e calcolare $E[X|Y = \frac{1}{2}]$.

(i) Si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin (0,1); \\ \int_x^1 15x^2y dy = \frac{15}{2}x^2(1-x^2) & \text{se } x \in (0,1). \end{cases}$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin (0,1); \\ \int_0^y 15x^2y dx = 5y^4 & \text{se } y \in (0,1). \end{cases}$$

Pertanto, X e Y non sono indipendenti, in quanto, ad esempio $0 = f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ per ogni $0 < y < x < 1$.

$$E(X) = \int_0^1 \frac{15}{2}x^3(1-x^2)dx = \frac{15}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}\ .$$

$$E(Y) = \int_0^1 5y^5 dy = \frac{5}{6}.$$

$$E(XY) = \int_0^1 dx \int_x^1 15x^3y^2 dy = \int_0^1 5x^3(1-x^3)dx =$$

$$= 5\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{15}{28}\ .$$

Infine $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{15}{28} - \frac{15}{24}\frac{5}{6} = \frac{5}{336}$.
(ii) Si ha

$$P(Y < 4X) = \int_0^{1/4} dx \int_x^{4x} 15x^2y dy + \int_{1/4}^1 dx \int_x^1 15x^2y dy$$

$$= \int_0^{1/4} x^2 dx \frac{15}{2}\Big[y^2\Big]_x^{4x} + \int_{1/4}^1 x^2 dx \frac{15}{2}\Big[y^2\Big]_x^1 =$$

$$= \int_0^{1/4} \frac{225}{2} x^4 dx + \int_{1/4}^1 \frac{15}{2}(x^2 - x^4) dx = \frac{45}{2} x^5 \Big|_0^{1/4} + \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^5\right) \Big|_{1/4}^1 = \frac{63}{64}.$$

(iii) Si ha:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$

quindi:

$$f_{X|Y}(x|1/2) = \frac{15x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{(0,1/2)}(x)}{5 \cdot (\frac{1}{2})^4} = 24x^2 \cdot \mathbf{1}_{(0,1/2)}(x).$$

Allora:

$$E(X|Y = 1/2) = \int_0^{1/2} x \cdot 24x^2 \, dx = 24 \frac{x^4}{4} \Big|_0^{1/2} = \frac{3}{8} \, .$$

Esercizio 1.5. *(II eso 18)*
Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x, y) = \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)}, \; x > 0, y > 0.$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y. Calcolare inoltre la densità condizionale di Y dato $\{X = 1\}$ e $E[Y|X = 1]$.
(ii) Calcolare la legge congiunta del vettore aleatorio (U, V), dove $U = X$ e $V = XY$. U e V sono indipendenti?
(iii) Calcolare la densità della v.a. $Z = \frac{U}{U+V}$ e $P(Z \leq \frac{1}{2}|Z > \frac{1}{4})$, essendo (U, V) il vettore di cui al punto precedente.

(i) Calcoliamo le densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)} dy & x \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $x > 0$ si ha

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x y} dy = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Analogamente

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \lambda^2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x(y+1)} dx & y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $y > 0$ si ha

$$f_Y(y) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x(y+1)} dx = \frac{\lambda^2 \Gamma(2)}{(\lambda(y+1))^2} = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

La densità condizionale di Y dato $\{X = 1\}$ ha la seguente espressione

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f(y,1)}{f_X(1)} = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \frac{\lambda^2 e^{-\lambda(y+1)}}{\lambda e^{-\lambda}} & y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $y > 0$

$$f_{Y|X}(y|1) = \lambda e^{-\lambda y}$$

ovvero è una densità esponenziale di parametro λ. Di conseguenza $E[Y|X = 1] = \frac{1}{\lambda}$.

(ii) Cominciamo col calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio $(X, XY) = \phi(X, Y)$, ove $(u, v) = \phi(x, y) = (x, xy)$. Applicando il cambio di variabili, si ha:

$$u = x, \ v = xy$$

e

$$x = u, \ y = \frac{v}{u},$$

ovvero $\phi^{-1}(u, v) = (u, v/u)$.

La matrice Jacobiana di ϕ^{-1} è:

$$J_{\phi^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u \end{pmatrix}$$

e $|det(J_{\phi^{-1}}(u, v))| = 1/u$. Pertanto, la densità del vettore (X, XY) è:

$$g(u, v) = \lambda^2 u e^{-\lambda u(\frac{v}{u}+1)} \cdot \frac{1}{u} = \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)}$$

Poiché si può scrivere

$$g(u, v) = \lambda e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda v}$$

le due v.a. X e XY sono indipendenti esponenziali di parametro λ.

(iii) Notiamo intanto che $Im\{Z\} = [0, 1]$ e quindi la funzione di ripartizione di Z è nulla per $z \leq 0$ ed è 1 per $z \geq 1$. Per $z \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) =& P\left(\frac{U}{U+V} \leq z\right) = P\left(V \geq \frac{(1-z)}{z} U\right) = \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} du \int_{\frac{(1-z)}{z}u}^\infty \lambda e^{-\lambda v} dv = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} e^{-\lambda \frac{(1-z)}{z} u} du = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \frac{u}{z}} du = z. \end{aligned}$$

Di conseguenza Z è uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 1]$.

Infine

$$P\left(Z \leq \frac{1}{2} | Z > \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{4} < Z \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(Z > \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 1.6. *(III scritto 18)*
Sia (X, Y) un vettore aleatorio tale che Y sia esponenziale di parametro λ mentre la densità condizionale di X dato $\{Y = y\}$ ha la seguente espressione

$$f_{X|Y}(x|y) = ye^{-yx} I_{(0,+\infty)}(x).$$

(i) Calcolare la legge della variabile aleatoria $Z = XY$. Si tratta di una legge nota?
(ii) Calcolare la densità di X.
(iii) Calcolare la densità condizionale di Y dato $\{X = x\}$ e $E(Y|X = 1)$.

È necessario notare che a densità congiunta del vettore (X, Y) ha l'espressione

$$f_{X,Y}(x, y) = \lambda ye^{-\lambda y} e^{-yx} I_{(0,+\infty)}(x) I_{(0,+\infty)}(y).$$

(i) Sia $Z = XY$. Allora, per ogni $t > 0$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(X \leq \frac{z}{Y}\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{\frac{t}{y}} dx \; \lambda ye^{-yx} e^{-\lambda y} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \int_0^{\frac{t}{y}} dx \; ye^{-yx} =$$

$$= (1 - e^{-z}) \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = (1 - e^{-z}).$$

Dunque, $Z \sim Exp(1))$.
(ii) La densità di X è nulla per $x \leq 0$, mentre per $x > 0$ si ha

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} \lambda ye^{-yx} e^{-\lambda y} dy = \frac{\lambda}{(x + \lambda)} \int_0^{+\infty} (x + \lambda) ye^{-(x+\lambda)y} dy =$$

$$= \frac{\lambda}{(x + \lambda)^2},$$

essendo l'integrale al secondo membro l'espressione del valore medio di una variabile aleatoria esponenziale di parametro $(x + \lambda)$.
(iii) La densità condizionale di Y dato $\{X = x\}$, $x > 0$ è nulla per $y \leq 0$, mentre per $y > 0$ si ha

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\lambda ye^{-\lambda y} e^{-yx}}{\frac{\lambda}{(x+\lambda)^2}} = (x + \lambda)^2 ye^{-(\lambda+x)y},$$

ovvero è una densità $\Gamma(2, (\lambda + x))$. Di conseguenza $E(Y|X = 1) = \frac{2}{\lambda+1}$.