1 Densità della somma, del prodotto e del quoziente di due variabili aleatorie continue

Si consideri il vettore aleatorio (X,Y) con densità congiunta $f(x,y)$.

- Determinare la densità $f_Z(z)$ della variabile aleatoria $Z = X + Y$.

  A tale scopo iniziamo con il calcolo della funzione di ripartizione $F_Z(z)$. Ricordiamo che

  $$\begin{aligned} F_Z(z) =& P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = P(X+Y \in A), \\ A =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y \leq z-x\} \end{aligned}$$

  (Fare grafico)
  Pertanto

  $$\begin{aligned} F_Z(z) =& \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f(x,u-x)du = \\ =& \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)dx \end{aligned}$$

  dove nella seconda uguaglianza abbiamo effettuato un cambio di variabile $u = x+y$ e nella terza uguaglianza abbiamo effettiato uno scabio dell' ordine di integrazione, possibile grazie al teorema di Fubini e Tonelli. Ora risulta

  $$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} G(u)du, \text{ dove } G(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)dx$$

  e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale

  $$f_Z(z) = F'(z) = G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx.$$

  La formula appena ricavata è nota con il nome di **Formula di convoluzione** di due variabili aleatorie continue.

  Osserviamo che, **se X ed Y sono indipendenti**, allora la Formula di convoluzione si scrive come

  $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

Esercizio 1.1. *Siano X ed Y indipendenti, con $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$.*
Determinare la densità della variabile aleatoria $Z = X + Y$.

A tale scopo utilizziamo la formula di convoluzione. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} f_X(x) =& \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x), \\ f_Y(y) =& \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y). \end{aligned}$$

e quindi, per ogni $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\lambda(z-x)} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(z-x) dx = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} (z-x)^{\beta-1} e^{-\lambda(z-x)} \mathbb{1}_{[0,z)}(x) dx = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{\alpha-1} (z-x)^{\beta-1} dx. \end{aligned}$$

Con la sostituzione $x = zt$ l' integrale precedente diventa

$$\begin{aligned} f_Z(z) =& \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda z} \int_0^1 (zt)^{\alpha-1} (z-zt)^{\beta-1} z dt = \\ =& \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt z^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z}. \end{aligned}$$

Ora la quantità in verde è una costante, mentre la parte in rosso è la parte funzionale della densità che è uguale alla parte funzionale di una $\Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$. Ma poiché f_Z è una densità deve necessariamente essere

$$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

- Determinare la densità $f_Z(z)$ della variabile aleatoria $Z = \frac{Y}{X}$.

Calcoliamo dapprima la funzione di ripartizione $F_Z(z)$. Ricordiamo che

$$\begin{aligned}F_Z(z) =&P(Z \leq z) = P(\frac{Y}{X} \leq z) = P(\frac{Y}{X} \leq z, X \geq 0) + P(\frac{Y}{X} \leq z, X < 0) = \\ =&P(Y \leq zX, X \geq 0) + P(Y \geq zX, X < 0) = \\ =&P((X,Y) \in A_1) + P((X,Y) \in A_2)\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}A_1 =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq zx\}, \\ A_2 =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \geq zx\}\end{aligned}$$

(Fare grafico)
Pertanto

$$F_Z(z) = \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dy + \int_{-\infty}^{0} dx \int_{zx}^{+\infty} f(x,y)dy$$

Con la sostituzione $y = xt$ l' espressione precedente diventa

$$\begin{aligned}F_Z(z) =& \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f(x,tx)xdt + \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z}^{+\infty} f(x,tx)xdt = \\ =& \int_{-\infty}^{z} \left(\int_0^{+\infty} f(x,tx)xdx\right) dt + \int_{z}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{0} f(x,tx)xdx\right) dt\end{aligned}$$

Ora risulta

$$\begin{aligned}F_Z(z) =& \int_{-\infty}^{z} G(t)dt + \int_{z}^{+\infty} D(t)dt \text{ dove} \\ G(t) =& \int_0^{+\infty} f(x,tx)xdx,\ D(t) = \int_{-\infty}^{0} f(x,tx)xdx\end{aligned}$$

e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned}f_Z(z) =&G(z) - D(z) = \int_0^{+\infty} f(x,zx)xdx - \int_{-\infty}^{0} f(x,zx)xdx = \\ =& \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x,tx)dx.\end{aligned}$$

Esercizio 1.2. *(II-eso-2013)*
Si consideri il vettore aleatorio (X,Y) con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & \textit{se } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

i) Trovare le densità di X e Y e calcolare la densità condizionata di X dato $\{Y = \frac{1}{2}\}$.
ii) Calcolare $P(Y + X \geq \frac{1}{2})$.
iii) Trovare la densità di $Z = \frac{X}{Y}$ ed il quantile di ordine $\frac{1}{2}$ della legge di Z.

(i) Si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1]; \\ \int_x^1 2 \cdot (x+y)dy = (2xy + y^2)\big|_x^1 = 1 + 2x - 3x^2 & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1]; \\ \int_0^y 2 \cdot (x+y)dy = (x^2 + 2xy)\big|_0^y = 3y^2 & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Pertanto, X e Y non sono indipendenti, in quanto $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. Ricordiamo che la densità condizionata di X dato Y ha la seguente espressione $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$. Con i dati del problema ne deriva che

$$f_{X|Y}\left(x|\frac{1}{2}\right) = \frac{(2x+1)}{\frac{3}{4}}\mathbb{I}_{(0,\frac{1}{2})}(x) = \frac{4(2x+1)}{3}\mathbb{I}_{(0,\frac{1}{2})}(x).$$

(ii)

$$P\left(Y + X \geq \frac{1}{2}\right) = \int\int_F 2(x+y)dx\ dy$$

dove F è l'insieme $F = \{(x,y) : 0 < x < y < 1, y > \frac{1}{2} - x\}$. Tale insieme si può rappresentare come unione disgiunta di due insiemi normali $F = F_1 \cup F_2$, dove $F_1 = \{(x,y) : 0 < x < \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - x < y < 1\}$, $F_2 = \{(x,y) : \frac{1}{4} < x < 1, x < y < 1\}$

Esplicitando il calcolo, si ottiene:

$$P\left(Y + X \geq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/4} dx \int_{\frac{1}{2}-x}^1 2(x+y)dy + \int_{1/4}^1 dx \int_x^1 2(x+y)dy =$$
$$= \int_0^{1/4}\left(x^2 + 2x + \frac{3}{4}\right)dx + \int_{1/4}^1 \left(-3x^2 + 2x + 1\right)dx = \cdots = \frac{7}{8}.$$

(iii) Calcoliamo la funzione di ripartizione della v.a. Z. A tale proposito, si noti che $Im(Z) = (0, 1)$ e quindi $F_Z(z) = 0$ se $z \leq 0$ e $F_Z(z) = 1$ se $z \geq 1$. Per $z \in (0, 1)$

$$F_Z(z) = P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) = P\left(Y \geq \frac{X}{z}\right) = P((X, Y) \in F)$$

dove $F = \{(x, y) : 0 < x < z, \frac{x}{z} < y < 1\}$. Esplicitamente

$$\begin{aligned} F_Z(z) = &\int_0^z dx \int_{\frac{x}{z}}^1 2(x+y)dy = \int_0^z \left(-\left(\frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\right)x^2 + 2x + 1\right) dx = \\ &= \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z \end{aligned}$$

Di conseguenza la densità ha l'espressione

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin (0, 1); \\ \frac{2}{3}(z+1) & \text{se } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Infine il quantile di ordine $\frac{1}{2}$ è soluzione dell'equazione $F_Z(z) = \frac{1}{2}$. Nel nostro caso l'equazione è $\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z = \frac{1}{2}$ ed è equivalentè a $2z^2 + 4z - 3 = 0$ la cui soluzione positiva è $z = \frac{\sqrt{10}-2}{2}$.

- Determinare la densità $f_Z(z)$ della variabile aleatoria $Z = XY$.

  Calcoliamo dapprima la funzione di ripartizione $F_Z(z)$. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} F_Z(z) = &P(Z \leq z) = P(XY \leq z) = P(XY \leq z, X \leq 0) + P(XY \leq z, X > 0) = \\ = &P(Y \geq \frac{z}{X}, X \leq 0) + P(Y \leq \frac{z}{X}, X > 0) = \\ = &P((X, Y) \in A_1) + P((X, Y) \in A_2) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} A_1 = &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ y \geq \frac{z}{x}\}, \\ A_2 = &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \leq \frac{z}{x}\} \end{aligned}$$

(Fare grafico)
Pertanto

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^0 dx \int_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f(x, y)dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x, y)dy$$

Con la sostituzione $y = \frac{t}{x}$ l' espressione precedente diventa

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z}^{+\infty} f(x, \frac{t}{x})\frac{1}{x}dt + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f(x, \frac{t}{x})\frac{1}{x}dt =$$
$$= \int_{z}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{0} f(x, \frac{t}{x})\frac{1}{x}dx \right) dt + \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{0}^{+\infty} f(x, \frac{t}{x})\frac{1}{x}dx \right) dt$$

Ora risulta

$$F_Z(z) = \int_{z}^{+\infty} G(t)dt + \int_{-\infty}^{z} D(t)dt \text{ dove}$$
$$G(t) = \int_{-\infty}^{0} f(x, \frac{t}{x})\frac{1}{x}dx,\ D(t) = \int_{0}^{+\infty} f(x, \frac{t}{x})\frac{1}{x}dx$$

e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f_Z(z) = -\,G(z) + D(z) = -\int_{-\infty}^{0} f(x, \frac{z}{x})\frac{1}{x}dx + \int_{0}^{+\infty} f(x, \frac{z}{x})\frac{1}{x}dxdx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})dx.$$

Concludiamo con la formula del **cambio di variabile negli integrali multipli**, utile per il calcolo della densità di una trasformazione vettoriale di una variabile aleatoria vettoriale.
Sia $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \ \Psi(u,v) = (\alpha(u,v), \beta(u,v))$ biettiva in un dominio aperto D, con $\alpha, \beta \in C^1(D)$. Allora, per ogni $A \in \mathbb{R}^2$ aperto

$$\int\int_A f(x,y)dxdy = \int\int_{\Psi^{-1}(A)} f(\alpha(u,v), \beta(u,v)) \det \begin{pmatrix} \alpha_u(u,v) & \alpha_v(u,v) \\ \beta_u(u,v) & \beta_v(u,v) \end{pmatrix} dudv$$

COME SI APPLICA? Consideriamo la seguente trasformazione

$$\begin{cases} U = & g(X,Y); \\ V = & h(X,Y) \end{cases}$$

Sotto opportune condizioni, se è nota la densità $f(x,y)$ del vettore (X,Y) allora la densità del vettore (U,V) vale

$$f_{(U,V)}(u,v) = f(\alpha(u,v), \beta(u,v)) \det \begin{pmatrix} \alpha_u(u,v) & \alpha_v(u,v) \\ \beta_u(u,v) & \beta_v(u,v) \end{pmatrix}$$

dove la trasformazione $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \ \Psi(u,v) = (\alpha(u,v), \beta(u,v))$ è la trasformazione inversa di $\Delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \Delta(x,y) = (g(x,y), h(x,y))$

Esercizio 1.3. *(II-eso-2018)*
Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x, y) = \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)}, \ x > 0, y > 0.$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y. Calcolare inoltre la densità condizionale di Y dato $\{X = 1\}$ e $E[Y|X = 1]$.
(ii) Calcolare la legge congiunta del vettore aleatorio (U, V), dove $U = X$ e $V = XY$. U e V sono indipendenti?
(iii) Calcolare la densità della v.a. $Z = \frac{U}{U+V}$ e $P(Z \leq \frac{1}{2}|Z > \frac{1}{4})$, essendo (U, V) il vettore di cui al punto precedente.

(i) Calcoliamo le densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)} dy & x \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $x > 0$ si ha

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x y} dy = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Analogamente

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \lambda^2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x(y+1)} dx & y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $y > 0$ si ha

$$f_Y(y) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x(y+1)} dx = \frac{\lambda^2 \Gamma(2)}{(\lambda(y+1))^2} = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

La densità condizionale di Y dato $\{X = 1\}$ ha la seguente espressione

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f(y, 1)}{f_X(1)} = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \frac{\lambda^2 e^{-\lambda(y+1)}}{\lambda e^{-\lambda}} & y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $y > 0$

$$f_{Y|X}(y|1) = \lambda e^{-\lambda y}$$

ovvero è una densità esponenziale di parametro λ. Di conseguenza $E[Y|X = 1] = \frac{1}{\lambda}$.

(ii) Cominciamo col calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio $(X, XY) = \phi(X, Y)$, ove $(u, v) = \phi(x, y) = (x, xy)$. Applicando il cambio di variabili, si ha:

$$u = x, \; v = xy$$

e

$$x = u, \; y = \frac{v}{u},$$

ovvero $\phi^{-1}(u, v) = (u, v/u)$.
La matrice Jacobiana di ϕ^{-1} è:

$$J_{\phi^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u \end{pmatrix}$$

e $|det(J_{\phi^{-1}}(u, v))| = 1/u$. Pertanto, la densità del vettore (X, XY) è:

$$g(u, v) = \lambda^2 u e^{-\lambda u(\frac{v}{u}+1)} \cdot \frac{1}{u} = \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)}$$

Poiché si può scrivere

$$g(u, v) = \lambda e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda v}$$

le due v.a. X e XY sono indipendenti esponenziali di parametro λ.
(iii) Notiamo intanto che $Im\{Z\} = [0, 1]$ e quindi la funzione di ripartizione di Z è nulla per $z \leq 0$ ed è 1 per $z \geq 1$. Per $z \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) = & P\left(\frac{U}{U+V} \leq z\right) = P\left(V \geq \frac{(1-z)}{z} U\right) = \\ & = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} du \int_{\frac{(1-z)}{z}u}^\infty \lambda e^{-\lambda v} dv = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} e^{-\lambda \frac{(1-z)}{z} u} du = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \frac{u}{z}} du = z. \end{aligned}$$

Di conseguenza Z è uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 1]$.
Infine

$$P\left(Z \leq \frac{1}{2} | Z > \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{4} < Z \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(Z > \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$