1 Esercizi sui modelli discreti

Esercizio 1.1. *(I-eso-2016)*
Si consideri la variabile aleatoria bidimensionale $(X, Y) \in \{0, 1\} \times \{1, 2, 3\}$ *avente densità:*

$$p(x, y) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^{x-1}}, \; x = 0, 1; \; y = 1, 2, 3$$

(i) Trovare le densità marginali di X *e di* Y.
(ii) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$; *trovare inoltre* $cov(X, Y)$.
(iii) Trovare la densità di $Z = X + Y$.
(iv) Determinare la densità di $U = \min(X, Y)$.
(v) Siano V *e* W *v.a. indipendenti, con distribuzione di Poisson, di parametri* $E(X)$ *e* $Var(X)$, *rispettivamente; trovare la densità di* $Q = V + W$.

Soluzione
(i) Si ha, per $x = 0, 1$:

$$p_X(x) = \sum_{y=1,2,3} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^{x-1}} = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^{x-1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{x-1}} = (\frac{1}{3})^x (\frac{2}{3})^{1-x}$$

che si riconosce essere la densità di una v.a. di Bernoulli di parametro 1/3. Inoltre:

$$p_Y(y) = \sum_{x=0,1} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^{x-1}} = \frac{1}{9}[1/2^{-1} + 1] = 1/3, \; y = 1, 2, 3$$

Pertanto Y è uniformemente distribuita in $\{1, 2, 3\}$. Siccome $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$, le v.a. X e Y sono indipendenti, quindi $cov(X, Y) = 0$.
(ii) Si ha:

$$E(X) = 1/3, \; Var(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

$$E(Y) = (1 + 2 + 3)/3 = 2, \; E(Y^2) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}.$$

Quindi

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3} \; .$$

(iii) Osserviamo che $Z \in \{1, 2, 3, 4\}$. Si ha:

$$P(Z = 1) = P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(Z = 2) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1)$$

$$= P(X=0)P(Y=2) + P(X=1)P(Y=1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(Z=3) = P(X=0, Y=3) + P(X=1, Y=2)$$
$$= P(X=0)P(Y=3) + P(X=1)P(Y=2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(Z=4) = P(X=1, Y=3) = P(X=1)P(Y=3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(iv) Se $U = \min(X, Y)$, allora $U \in \{0, 1\}$; si ha:

$$P(U=0) = P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=0, Y=3) = \frac{2}{3}$$

$$P(U=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) = \frac{1}{3}$$

(v) Si ha $V \sim Poisson(1/3)$, $W \sim Poisson(2/9)$; per il teorema di addizione di v.a. di Poisson indipendenti, $Q = V + W \sim Poisson(1/3 + 2/9)$, quindi $Q \sim Poisson(5/9)$.

Esercizio 1.2. *(I-eso-2016)*
Si esegue un'estrazione di una pallina da un'urna scelta a caso tra due urne. La prima urna contiene una pallina rossa e due palline bianche, mentre la seconda urna contiene una pallina rossa e una bianca.
(i) Calcolare la probabilità che venga estratta una pallina rossa.
(ii) Calcolare la probabilità che venga estratta una pallina bianca.
(iii) Sapendo che è stata estratta una pallina rossa, calcolare la probabilità che sia stata estratta dalla prima urna.

Soluzione
Sia U_1 l'evento che si estrae la pallina dalla prima urna e sia U_2 l'evento che si estrae la pallina dalla seconda urna; sia inoltre R l'evento che si estrae una pallina rossa e B l'evento che si estrae una pallina bianca. Allora:
(i)

$$P(R) = P(R|U_1)P(U_1) + P(R|U_2)P(U_2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{5}{12}.$$

(ii)

$$P(B) = P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{7}{12} = 1 - P(R).$$

(iii) Per la formula di Bayes:

$$P(U_1|R) = \frac{P(R|U_1)P(U_1)}{P(R)} = \frac{1/3 \cdot 1/2}{5/12} = \frac{2}{5}.$$

Esercizio 1.3. *(I-eso-2016)*
3. *Si lancia ripetutamente una moneta truccata, e si indica con T il numero di lanci necessario per ottenere testa per la prima volta. È noto che $P(T > 3) = \frac{8}{27}$.*
(i) Trovare la distribuzione di T e calcolare la probabilità che in 4 lanci della moneta esca 3 volte testa.
(ii) Si lancia ora un dado perfetto, e sia S il numero di lanci necessario per ottenere 4 per la prima volta. Trovare la distribuzione di S e calcolarne media e varianza.
(iii) Trovare la densità congiunta $P(T = k,\ S = h)$, $k, h = 1, 2 \ldots,$ e calcolare
$P(T = 2,\ S < 2)$ e $P(T + S < 3|T < 2)$.
(iv) Calcolare $cov(5(T - S), 2S)$.
(v) Calcolare $P(S > 5T)$.

Soluzione
(i) T è una v.a. geometrica modificata di parametro p tale che $(1-p)^3 = 8/27$, da cui $p = 1/3$. Allora la probabilità cercata è

$$\binom{4}{3}(1/3)^3(2/3) = 8/71.$$

(ii) S è una v.a. geometrica modificata di parametro $q = 1/6$. Si ha $E(S) = 1/q = 6$ e $Var(S) = (1-q)/q^2 = 30$.
(iii) Siccome T e S sono indipendenti, si trova $P(T = k, S = h) = P(T = k)P(S = h)$ e quindi

$$P(T = 2, S < 2) = P(T = 2, S = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$$

Inoltre

$$P(T + S < 3|T < 2) = P(T + S < 3|T = 1) = \frac{P(T + S < 3, T = 1)}{P(T = 1)}$$

$$= \frac{P(S < 2, T = 1)}{P(T = 1)} = \frac{P(S < 2) \cdot P(T = 1)}{P(T = 1)} = P(S < 2) = P(S = 1) = 1/6.$$

(iv) Si ha:

$$cov(5(T-S), 2S) = E[10(T-S)S] - 5E(T-S) \cdot 2E(S) = 10(E(ST) - E(S^2)) + 180$$

Siccome $var(S) = 30$, si trova $E(S^2) = var(S) + E(S)^2 = 30 + 36 = 66$. Dunque, riprendendo il calcolo, tenendo conto che $E(TS) - E(T)E(S) = 0$, essendo T ed S indipendenti, si trova infine $cov(5(T - S), 2S) = -300$.

(v) Si ha:

$$P(S>5T)=\sum_{k=1}^{\infty}P(S>5k)P(T=k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5}{6})^{5k}\cdot\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(\frac{5}{6})^{5}\sum_{k=1}^{\infty}((\frac{5}{6})^{5}\cdot\frac{2}{3})^{k-1}$$
$$=\frac{1}{3}(\frac{5}{6})^{5}\sum_{i=0}^{\infty}((\frac{5}{6})^{5}\frac{2}{3})^{i}=\frac{1}{3}(\frac{5}{6})^{5}\cdot\frac{1}{1-(\frac{5}{6})^{5}\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{5^5}{3\cdot 6^5-2\cdot 5^5}=\frac{1}{(\frac{6}{5})^5\cdot 3-2}\cong 0.1829\ .$$

Esercizio 1.4. *(I-eso-2018)*
Una fabbrica produce monete, provenienti da due linee di produzione diverse A e B con la stessa probabilità. Si sa che non tutte le monete prodotte sono eque: precisamente, il 10% *delle monete prodotte dalla linea A sono difettose, poiché danno testa con probabilità* 1/8; *mentre, il* 20% *delle monete che escono da B sono difettose, in quanto danno testa con probabilità* 1/4.
(i) Qual è la probabilità che una moneta scelta a caso sia difettosa?
(ii) Qual è la probabilità che una moneta scelta a caso dia testa?
(Suggerimento: si consideri la partizione di $\Omega = D^C \cup (D\cap A)\cup(D\cap B)$, *dove* D *è l'evento "la moneta scelta è difettosa").*
(iii) Sapendo che la moneta scelta in un lancio ha dato testa, qual è la probabilità che si tratti di una moneta difettosa?

Soluzione
(i) Indichiamo con D l'evento "la moneta scelta è difettosa", con A l'evento "la moneta scelta proviene dalla linea A", con B l'evento "la moneta scelta proviene dalla linea B". Occorre trovare $P(D)$; per la formula delle probabilità totali, si ha:

$$P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)$$

e, sostituendo $P(A)=P(B)=1/2$, $P(D|A)=0.1$, $P(D|B)=0.2$, si ottiene

$$P(D)=\frac{1}{2}(0.1+0.2)=0.15\ .$$

(ii) Sia T l'evento "tirando la moneta scelta, esce testa". Occorre trovare $P(T)$. Utilizziamo la formula delle probabilità totali a partire dalla partizione di Ω costituita dagli eventi D^C = "la moneta scelta non è difettosa", $D \cap A$ e $D \cap B$; si ha:

$$P(T) = P(T|D^C)P(D^C) + P(T|(D \cap A))P(D \cap A) + P(T|(D \cap B))P(D \cap B)$$

$$= P(T|D^C)P(D^C) + P(T|(D \cap A))P(D|A)P(A) + P(T|(D \cap B))P(D|B)P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.85 + \frac{1}{8} \cdot 0.1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0.2 \cdot \frac{1}{2} = 0.45625\ .$$

(iii) Occorre trovare $P(D^C|T)$. Utilizziamo la formula di Bayes

$$P(D^C|T) = \frac{P(T|D^C)P(D^C)}{P(T)} = \frac{0.425}{0.45625} = 0.93.$$

Esercizio 1.5. *(I-eso-2018)*
Per $0 < \theta < 1$, si consideri la funzione

$$p(k,m) = \begin{cases} \frac{\theta^k}{5m!} \quad (1-\theta)\,(\ln 5)^m & se\ k, m = 0, 1, \ldots; \\ 0 \quad & altrimenti. \end{cases}$$

(i) Dopo aver verificato che $p(k,m)$ è la densità congiunta di una v.a. discreta bidimensionale (X,Y), trovare le densità marginali di X e Y; si tratta di distribuzioni note? X e Y sono indipendenti?
(ii) Calcolare $E(X), E(Y), E(X^2)$ e $E(Y^2)$.
(iii) Posto $Z = X + Y$, calcolare la densità condizionale di Z dato $\{Y = 2\}$ e $cov(3Z, 2X)$.
(iv) Siano U e V v.a. indipendenti, con la stessa distribuzione di $X + 1$, dove X è la v.a. del punto (i) e $\theta = 2/3$. Trovare la distribuzione di $Z = \min(U,V)$ e calcolare $P(U > V)$.

Soluzione
(i) Si ha:

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} p(k,m) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^k(1-\theta)(\ln 5)^m}{5m!}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(1-\theta)\theta^k\right) \cdot \frac{1}{5} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ln 5)^m}{m!}\right).$$

La prima serie vale $(1-\theta)\cdot\frac{1}{1-\theta}=1$; la seconda è la serie di Taylor della funzione e^x scritta per $x=\ln 5$, quindi vale $\exp(\ln 5)=5$; dunque, si ottiene
$$\sum_{k,m} p(k,m)=1\cdot\frac{1}{5}\cdot 5=1.$$
Quindi $p(k,m)$ è la densità congiunta di una v.a. discreta bidimensionale (X,Y) che assume valori $(k,m)\in\{0,1,\dots\}\times\{0,1,\dots\}$.
Per $k=0,1\dots$, si ha:
$$p_X(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\theta^k(1-\theta)(\ln 5)^m}{5m!}$$
$$=(1-\theta)\theta^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\ln 5)^m}{5m!}=(1-\theta)\theta^k,$$
poiché la serie vale 1; quindi X ha distribuzione Geometrica di parametro $p=1-\theta$.
Per quanto riguarda Y, si ha per $m=0,1,\cdots$:
$$p_Y(m)=\frac{(\ln 5)^m}{5m!}\sum_{k=0}^{\infty}(1-\theta)\theta^k=\frac{(\ln 5)^m}{5m!},$$
poiché la serie vale 1; quindi Y ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda=\ln 5$.
Inoltre X e Y sono indipendenti, essendo $p(k,m)=p_X(k)p_Y(m)$.
(ii) Ricordando le formule per media e varianza di una v.a. di Poisson e di una v.a. Geometrica, si ha che $E(X)=(1-p)/p=\theta/(1-\theta)$, $Var(X)=(1-p)/p^2=\theta/(1-\theta)^2$, da cui $E(X^2)=Var(X)+E^2(X)=\theta/(1-\theta)^2+\theta^2/(1-\theta)^2=(\theta+\theta^2)/(1-\theta)^2$.
$E(Y)=Var(Y)=\lambda=\ln 5$, da cui $E(X^2)=Var(X)+E^2(X)=\ln 5+(\ln 5)^2$.
(iii) Notiamo che $\mathrm{Im}(Z)=\{2,3,4...\}$. Per ogni $z\in\mathrm{Im}(Z)$
$$P(Z=z|Y=2)=\frac{P(Z=z,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{P(X+Y=z,Y=2)}{P(Y=2)}=$$
$$=\frac{P(X=z-2,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{P(X=z-2)P(Y=2)}{P(Y=2)}=P(X=z-2)=\theta^{z-2}(1-\theta).$$
Infine, utilizzando il fatto che la covarianza è lineare in ciascuna delle componenti e che la covarianza di due variabili indipendenti è nulla, si ha
$$cov(3Z,2X)=cov(3X+3Y,2X)=cov(3X,2X)+cov(3Y,2X)=6Var(X)=6\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

(iv) Le v.a. U e V sono indipendenti e hanno distribuzione geometrica modificata di parametro 1/3. Allora, per $k = 1, 2 \cdots$:

$$P(Z > k) = P(U > k)P(V > k) = (1-1/3)^k(1-1/3)^k = (4/9)^k = (1-5/9)^k.$$

Quindi Z ha distribuzione Geometrica modificata di parametro 5/9. Inoltre

$$P(U > V) = \sum_{k=1}^{\infty} P(U > k)P(V = k) = \sum_{k=1}^{\infty}(2/3)^k(1/3)(2/3)^{k-1} = (1/3)\cdot(2/3)\sum_{k=1}^{\infty}(4/9$$

$$= \frac{2}{9}\sum_{i=0}^{\infty}(4/9)^i = \frac{2}{9}(1/(1-4/9)) = \frac{2}{9}\cdot\frac{9}{5} = \frac{2}{5}\ .$$

Esercizio 1.6. *(I-eso-2010)*
Un centralino telefonico internazionale riceve chiamate dall'Italia e dall'estero. Siano X_i ed Y_i le variabili aleatorie che contano il numero di chiamate ricevute il giorno i-esimo rispettivamente dall'estero e dall'Italia. Supponendo che X_i, Y_i siano indipendenti con $X_i \sim Poisson(1)$ ed $Y_i \sim Poisson(2)$ per ogni i e che le chiamate relative a giorni diversi siano indipendenti, calcolare:
(i) la probabilità che in un giorno arrivi almeno una chiamata dall'estero;
(ii) la densità discreta della variabile aleatoria "giorni di attesa per la prima chiamata dall'estero";
(iii) la distribuzione della variabile aleatoria "numero complessivo di telefonate giornaliere" e la probabilità che su n chiamate arrivate in un giorno, k siano dall'estero.

Soluzione
(i) La probabilità da calcolare è: $P(X_i \geq 1) = 1-P(X_i = 0) = p = 1-e^{-1}$.
(ii) L'evento che occorra aspettare k giorni per la prima chiamata dall'estero è dato da:

$$\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_{k-1} = 0\} \cap \{X_k \geq 1\}$$

pertanto la sua probabilità, per l'indipendenza delle X_i, è

$$(1 - e^{-1}) \cdot [e^{-1}]^{k-1}$$

che è la densità discreta di una v.a. Y con distribuzione geometrica modificata di parametro $p = 1 - e^{-1}$. (iii) Il numero complessivo delle chiamate giornaliere è $Z_i = X_i + Y_i \sim Poisson(1 + 2)$ (per l'indipendenza); inoltre

$$P(X_i = k|Z_i = n) = \frac{P(X_i = k, Y_i = n - k)}{P(Z_i = n)} =$$

(per l'indipendenza)

$$= \frac{P(X_i = k)P(Y_i = n-k)}{P(Z_i = n)} = \dots \binom{n}{k} \frac{1^k \cdot 2^{n-k}}{(3)^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

Esercizio 1.7. *(I-eso-2010)*
Si lancia un dado perfetto finché non esca un numero dispari il cui quadrato è minore di 10; *indicato con T il minimo numero di lanci necessari per ottenere questo, trovare la densità di T.*
(i) Calcolare $P(T = 201|T > 200)$.
(ii) Se S è una v.a., indipendente da T e con la stessa sua distribuzione, calcolare:
(a) $P(T = S)$
(b) $E(T - 3S)$ e $Var(T - 3S)$.

Soluzione
Il successo è l'evento $S = \{1, 3\}$, pertanto $P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
T è l'istante di primo successo in una sequenza di prove indipendenti e Bernoulliane di parametro $p = P(S) = 1/3$, quindi

$$P(T = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, \ k = 1, \dots$$

che è la densità geometrica modificata di parametro p; risulta $E(T) = 1/p = 3$ e $Var(T) = \frac{1-p}{p^2} = 6$.
(i) Per la proprietà di mancanza di memoria della legge geometrica (e anche di quella modificata) si ha:

$$P(T = 200 + 1|T > 200) = P(T = 1) = 1/3$$

(ii) Per l'indipendenza di T ed S, si ha:

$$P(T = S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T = k)P(S = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{9}/\frac{5}{9} = \frac{1}{5}$$

$$(a)\ E(T - 3S) = E(T) - 3E(S) = 3 - 3 \cdot 3 = -6$$

$$(b)\ Var(T - 3S) = Var(T) + 9 \cdot Var(S) = 10 \cdot Var(T) = 10 \cdot 6 = 60.$$