1 Esercizi sui modelli discreti

Esercizio 1.1. *(I-eso-2017)*
Si consideri la funzione

$$p(k,m) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{k!(m-k)!} & \textit{se } m \geq k \text{ e } k,m = 0,1,\dots \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Dopo aver verificato che $p(k,m)$ è la densità congiunta di una v.a. discreta bidimensionale (X,Y), calcolare $P(Y<X)$ e trovare la densità di $U = \max(X,Y)$.
(ii) Trovare le densità marginali di X e Y, e calcolare $E(X), E(Y), Var(X)$ e $Var(Y)$; si tratta di distribuzioni note? X e Y sono indipendenti?
(iii) Trovare la densità condizionale di X dato $Y = m$.

Soluzione
(i) Si ha:

$$\sum_{k,m} p(k,m) = \sum_{k,m\geq 0, m\geq k} \frac{e^{-2}}{k!(m-k)!} = e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{k!(m-k)!}$$

$$= e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{(m-k)!} = e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

$$= e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot e = e^{-2} \cdot e \cdot e = 1,$$

e quindi $p(k,m)$ è la densità congiunta di una v.a. discreta bidimensionale (X,Y).
Siccome nella definizione di $p(k,m)$ compare il vincolo $m \geq k$, allora la densità è nulla per $m < k$, ovvero $P(Y < X) = 0$. Quindi, con probabilità 1, risulta $\max(X,Y) = Y$, la cui distribuzione è trovata al punto successivo.
(ii) Per $k = 0, 1 \dots,$ si ha:

$$p_X(k) = \sum_m p(k,m) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{e^{-2}}{k!(m-k)!} = \frac{e^{-2}}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{(m-k)!}$$

$$= \frac{e^{-2}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{e^{-2}}{k!}\, e = \frac{e^{-1}}{k!},$$

e quindi X ha distribuzione di Poisson di parametro 1.

Per quanto riguarda Y, si ha per $m = 0, 1, \cdots$:

$$p_Y(m) = \sum_k p(k,m) = \sum_{k=0}^{m} \frac{e^{-2}}{k!(m-k)!} = \frac{e^{-2}}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}$$
$$= \frac{e^{-2}}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = \frac{e^{-2}}{m!} \cdot 2^m,$$

e quindi Y ha distribuzione di Poisson di parametro 2. Pertanto, ricordando le formule per media e varianza di una v.a. di Poisson, si ha che $E(X) = Var(X) = 1$ e $E(Y) = Var(Y) = 2$. Infine, X e Y non sono indipendenti, poiché ad esempio $p(1,0) = 0 \neq p_X(1)p_Y(0) = e^{-1}e^{-2} = e^{-3}$.
(iii) Fissato $m = 0, 1, \ldots$, si ha:

$$p_{X|Y}(k|m) = \frac{p(k,m)}{p_Y(m)}.$$

Quindi, per $k = 0, 1, \ldots$, si ottiene:

$$p_{X|Y}(k|m) = \frac{\frac{e^{-2}}{k!(m-k)!}}{\frac{2^m}{m!}e^{-2}} = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k},$$

che è una legge $B(m, 1/2)$.

Esercizio 1.2. *(I-eso-2017)*
Due urne, A e B, contengono 10 monete. Precisamente: A contiene 5 monete difettose e 5 eque; B contiene 7 monete difettose e 3 eque. Vengono estratte senza reinserimento 5 monete da una delle due urne. Qual è la probabilità che ve ne sia almeno una difettosa, sapendo che:
(i) l'urna scelta è la A; l'urna scelta è la B;
(ii) l'urna è scelta a caso tra A e B.
(iii) Sapendo che è stata estratta almeno una moneta difettosa, calcolare la probabilità che sia stata scelta l'urna A.

Soluzione
Se interpretiamo come "successo" l'evento "la moneta estratta è difettosa", si tratta di uno schema successo-insuccesso, da modellizzare con la distribuzione ipergeometrica, poiché le estrazioni sono senza rimpiazzo. Indichiamo con A l'evento "si sceglie l'urna A" e con B l'evento "si sceglie l'urna B", e con X la v.a. che conta il numero di monete difettose prendendo 5 monete senza reinserimento da un'urna prefissata.

(i) Si ha:

$$P(X=k|A)=\frac{\binom{5}{k}\binom{5}{5-k}}{\binom{10}{5}},$$

$$P(X=k|B)=\frac{\binom{7}{k}\binom{3}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

Si richiede

$$P(X\geq 1|A)=1-P(X=0|A)=1-\frac{\binom{5}{0}\binom{5}{5}}{\binom{10}{5}}=1-1/252=251/252=0.9960317$$

Analogamente:

$$P(X\geq 1|B)=1-P(X=0|B)=1-0=1$$

(ii) Per la formula delle probabilità totali:

$$\begin{aligned}P(X\geq 1)=&P(X\geq 1|A)P(A)+P(X\geq 1|B)P(B)=\\=&\frac{1}{2}(0.9960317+1)=0.997966\end{aligned}$$

(iii) Per la formula di Bayes:

$$P(A|X\geq 1)=\frac{P(X\geq 1|A)P(A)}{P(X\geq 1|A)P(A)+P(X\geq 1|B)P(B)}$$

$$=\frac{0.5\cdot 0.9960317}{0.997966}=\frac{0.9960317}{0.997966}=0.4990308$$

Esercizio 1.3. *(I-eso-2017)*
Si lancia ripetutamente un dado truccato, in modo che la probabilità che esca 6 in un lancio sia p, mentre la probabilità che esca una qualunque faccia $i\neq 6$ sia $(1-p)/5$. Indichiamo con T il numero di lanci necessario per ottenere 6 per la prima volta. Sapendo che $P(T\leq 4)=\frac{65}{81}$,
(i) trovare p e quindi la distribuzione di T, e calcolare la probabilità che in 4 lanci del dado esca 3 volte la faccia 2.

(ii) Si lancia ora una moneta equa, e sia S il numero di lanci necessario per ottenere Testa per la prima volta. Trovare la distribuzione di S e calcolarne media e varianza.
(iii) Trovare la densità congiunta $P(T = k,\ S = h),\ k, h = 1, 2 \ldots,$ e calcolare
$P(T = 3,\ S > 2)$ e $P(T + S > 3|T < 2)$.
(iv) Calcolare $cov(4(S + T), S)$.
(v) Calcolare $P(S/4 > T)$.

Soluzione
(i) T ha distribuzione geometrica modificata di parametro p incognito, ovvero $P(T = k) = p(1 - p)^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots$; dalla teoria si sa che $P(T > 4) = (1 - p)^4$, pertanto $P(T \leq 4) = 1 - (1 - p)^4$. Imponendo che tale quantità sia uguale a $65/81$, si ottiene $p = 1/3$.
Quindi, in ogni lancio, la probabilità che il dado dia 6 è $1/3$, mentre la probabilità che esso dia una qualunque faccia $i \neq 6$ è $2/15$. Il numero di volte,V, che esce la faccia 2, lanciando il dado 4 volte è una v.a. binomiale di parametri 4 e $2/15$; pertanto:

$$P(V = 3) = \binom{4}{3} (2/15)^3 \cdot (13/15) = 0.0082173$$

(ii) S ha distribuzione geometrica modificata di parametro $1/2$. Quindi, $P(S = h) = (1/2)^h,\ h = 1, 2, \ldots$; dalla teoria si sa che $E(S) = 1/(1/2) = 2$ e $Var(S) = (1 - 1/2)/(1/2)^2) = 2$.
(iii) Siccome T ed S sono indipendenti, si ha $P(T - k, S = h) = P(T = k)P(S = h)$ e quindi

$$P(T = 3, S > 2) = P(T = 3)P(S > 2) = 3(2/3)^2 \cdot (1 - 1/2)^2 = 1/3.$$

Inoltre

$$P(T + S > 3|T < 2) = \frac{P(T + S > 3, T = 1)}{P(T < 2)} = \frac{P(S > 2, T = 1)}{P(T = 1)}$$

$$= \frac{P(S > 2)P(T = 1)}{P(T = 1)} = \frac{(1/2)^2 \cdot (1/3)}{1/3} = 1/4.$$

(iv) Si ha:

$$cov(4S + T, S) = E[(4S + T)S] - [4E(S) + E(T)]E(S)$$

$$= E(4S^2) + E(T)E(S) - 4E^2(S) - E(T)E(S) = 4Var(S) = 4 \cdot 2 = 8.$$

(v) Si ha:

$$P(S/4 > T) = P(S > 4T) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S > 4k)P(T = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{5k} \cdot \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^5 \sum_{k=1}^{\infty} ((\frac{1}{2})^5 \cdot \frac{2}{3})^{k-1}$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^5 \sum_{i=0}^{\infty} ((\frac{1}{2})^5 \frac{2}{3})^i = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^5 \cdot \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^5 \frac{2}{3}}$$

$$= (1/(32 \cdot 3)) \cdot (32 \cdot 3)/(32 \cdot 3 - 2) = 1/94 = 0.010638.$$

Esercizio 1.4. *(1.68, Abundo)*
Si consideri la v.a. bidimensionale discreta (X, Y) con densità:

$$p(x, y) = \frac{2^{x+y \log_2 5}}{x!\ y!\ e^7}, \quad x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y. Si tratta di densità note? X e Y sono stocasticamente indipendenti?
(ii) Calcolare $cov(X + 1, Y + 1)$, $E(X - 2Y)$ e $Var(X - 2Y)$.
(iii) Trovare la densità di $Z = X + Y$ e calcolare $P(Z > 3)$.
(iv) Per $h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $h \geq k$, calcolare $P(X = k|Z = h)$; in particolare calcolare $P(X = 1|Z = 2)$. Condizionatamente a $Z = h$, che cosa si può dire riguardo alla distribuzione di X?

Soluzione
(i) Osserviamo che $p(x, y)$ può essere scritta come

$$p(x, y) = \frac{2^x 5^y}{x!\ y!} e^{-7}, \quad x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Pertanto, si ha, per $x = 0, 1, 2, \cdots$:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{2^x 5^y}{x! y!} e^{-7} = e^{-7} \frac{2^x}{x!} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{5^y}{y!}$$

$$= e^{-7} \frac{2^x}{x!} e^5 = e^{-2} \frac{2^x}{x!}$$

e quindi $X \sim$ Poisson(2). Analogamente, per $y = 0, 1, 2, \cdots$:

$$p_Y(x) = P(Y = y) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x 5^y}{x!y!} e^{-7} = e^{-7} \frac{5^y}{y!} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!}$$

$$= e^{-7} \frac{5^y}{y!} e^2 = e^{-5} \frac{5^y}{y!}$$

e quindi $X \sim Poisson(5)$. Le v.a. X e Y sono stocasticamente indipendenti, essendo $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$, e quindi $cov(X, Y) = 0$.
(ii) Poiché per ogni a, b, si ha

$$\begin{aligned} cov(X + a, Y + b) =& E[(X + a - E(X + a))(Y + b - E(Y + b))] = \\ =& E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = cov(X, Y), \end{aligned}$$

allora $cov(X + 1, Y + 1) = cov(X, Y) = 0$. Inoltre, ricordando che, sia la media che la varianza di una v.a. con distribuzione di Poisson di parametro λ sono uguali a λ, si ottiene $E(X-2Y) = E(X)-2E(Y) = 2-2\cdot 5 = -8$; inoltre, siccome X e Y sono indipendenti (e quindi anche X e $-2Y$ lo sono), si ha $Var(X - 2Y) = Var(X) + Var(-2Y) = Var(X) + (-2)^2 Var(Y) = 2 + 4 \cdot 5 = 22$.
(iii) Ricordando che la somma di v.a. indipendenti di Poisson, di parametri λ e μ, rispettivamente, ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda + \mu$, si ottiene che $Z \sim$ Poisson(7) e quindi

$$P(Z > 3) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 3)$$

$$= 1 - e^{-7}(1 + 7 + 7^2/2! + 7^3/3!) = 0.918$$

(iii) Per $h \geq k$, si ha

$$P(X = k|Z = h) = \frac{P(X = k, X + Y = h)}{P(X + Y) = h)} = \frac{P(X = k, Y = h - k)}{P(Z = h)} =$$

(essendo X e Y indipendenti)

$$\left[e^{-2} \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-5} \frac{5^{h-k}}{(h-k)!} \right] \Big/ \left[e^{-7} \frac{7^h}{h!} \right]$$

$$= \frac{2^k 5^{h-k}}{7^h} \cdot \frac{h!}{k!(h-k)!} = \binom{h}{k} \frac{2^k}{7^k} \cdot \frac{5^{h-k}}{7^{h-k}} = \binom{h}{k} \left(\frac{2}{7}\right)^k \left(\frac{5}{7}\right)^{h-k}$$

Pertanto, condizionatamente a $Z = h$, la v.a. X ha distribuzione binomiale di parametri h e $2/7$.

Per $k = 1$ e $h = 2$, si ottiene

$$P(X = 1|Z = 2) = \binom{2}{1} \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} = 2 \cdot \frac{10}{49} = \frac{20}{49} = 0.4081$$

.

Esercizio 1.5. *(1.74 Abundo)*
Si consideri la variabile aleatoria bidimensionale $(X, Y) \in \{-1, 2\} \times \{-1, 1, 2\}$ *tale che:*

$$P(X = -1, Y = -1) = P(X = 2, Y = -1) = c/12,$$
$$P(X = -1, Y = 1) = P(X = 2, Y = 2) = c/6,$$
$$P(X = -1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 1) = c/4,$$

dove $c > 0$ *è una costante.*
(i) Dopo aver determinato c*, trovare le densità marginali di* X *e di* Y*. Le v.a.* X *e* Y *sono indipendenti?*
(ii) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$.
(iii) Determinare la densità discreta di $Z = X + Y$.
(iv) Determinare la densità discreta di $U = \min(X, Y)$.

Soluzione
(i) Dovendosi avere $\sum_{i\in\{-1,2\}} \sum_{j\in\{-1,1,2\}} P(X = i, Y = j) = 1$, si ottiene $2c(1/12 + 1/6 + 1/4) = 1$, da cui $c = 1$. Quindi:

$$P(X = -1, Y = -1) = P(X = 2, Y = -1) = 1/12,$$
$$P(X = -1, Y = 1) = P(X = 2, Y = 2) = 1/6,$$
$$P(X = -1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 1) = 1/4.$$

Si ha poi:

$$P(X = i) = \sum_{j\in\{-1,1,2\}} P(X = i, Y = j),$$

per cui:

$$P(X = -1) = 1/12+1/6+1/4 = 1/2, \; P(X = 2) = 1/12+1/4+1/6 = 1/2.$$

Analogamente:

$$P(Y = j) = \sum_{i\in\{-1,2\}} P(X = i, Y = j),$$

per cui:

$$P(Y=-1) = 1/12 + 1/12 = 1/6, \; P(Y=1) = 1/6 + 1/4 = 5/12,$$

$$P(Y=2) = 1/4 + 1/6 = 5/12.$$

Siccome $\frac{1}{6} = P(X=-1, Y=1) \neq P(X=-1)P(Y=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{24}$, le v.a. X e Y non sono indipendenti.
(ii) Si ha:

$$E(X) = \sum_{i \in \{-1,2\}} i \cdot P(X=i) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \; ,$$

$$E(X^2) = \sum_{i \in \{-1,2\}} i^2 \cdot P(X=i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

da cui $Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

$$E(Y) = \sum_{j \in \{-1,1,2\}} j \cdot P(Y=j) = (-1) \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{13}{12} \; ,$$

$$E(Y^2) = \sum_{j \in \{-1,1,2\}} j^2 \cdot P(Y=j) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{5}{12} + 2^2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{9}{4} \; ,$$

da cui $Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{9}{4} - \frac{169}{144} = \frac{155}{144}$.
(iii) Osserviamo che $Z \in \{-2, 0, 1, 3, 4\}$. Si ha:

$$P(Z=-2) = P(X=-1, Y=-1) = 1/12, \; P(Z=0) = P(X=-1, Y=1) = 1/6,$$

$$P(Z=1) = P(X=-1, Y=2) + P(X=2, Y=-1) = 1/4 + 1/12 = 1/3,$$

$$P(Z=3) = P(X=2, Y=1) = 1/4, \; P(Z=4) = P(X=2, Y=2) = 1/6.$$

(iv) Per la variabile $U = \min(X, Y)$, procediamo analogamente a quanto fatto sopra. Osserviamo che $U \in \{-1, 1, 2\}$; si ha:

$$P(U=-1) = P(X=-1, Y=-1) + P(X=-1, Y=1) + P(X=-1, Y=2)$$

$$+ P(X=2, Y=-1) = 1/12 + 1/6 + 1/4 + 1/12 = 7/12,$$

$$P(U=1) = P(X=2, Y=1) = 1/4, \; P(U=2) = P(X=2, Y=2) = 1/6.$$

Esercizio 1.6. *(1.76 Abundo)*
Siano X e Y due v.a. indipendenti e con distribuzione di Poisson di parametri $\frac{1}{3}\ln 3$ e $\frac{2}{3}\ln 3$, rispettivamente.
(i) Calcolare $p = P(X + Y \leq 1/5)$.
(ii) Si lanciano ripetutamente due monete truccate, M_1 e M_2; la probabilità che M_1 dia testa è p, mentre la probabilità che M_2 dia testa è $1-p$, dove p è la probabilità calcolata al punto (i). Sia T il numero di lanci necessario per ottenere testa per la prima volta, lanciando la moneta M_1 e S il numero di lanci necessario per ottenere testa per la prima volta, lanciando la moneta M_2. Trovare le distribuzioni di T ed S e calcolarne media e varianza.
(iii) Trovare la densità congiunta $P(T = k,\ S = h)$, $k, h = 1, 2\ldots,$ e calcolare
$P(T = 3,\ S < 2)$ e $P(T + S = 2|S < 2)$.
(iv) Trovare la densità di $Z = T + S$ e calcolare $cov(2Z, 3S)$.
(v) Calcolare $P(T < 3S)$.

Soluzione
(i) Ricordando che la somma di v.a. di Poisson indipendenti ha ancora distribuzione di Poisson, avente come parametro la somma dei parametri, si conclude che $X + Y \sim Poisson(\ln 3)$. Pertanto, $p = P(X + Y \leq 1/5) = P(X + Y = 0) = e^{-\ln 3} = 1/3$.
(ii) T ed S sono v.a. geometriche modificate di parametro $p = 1/3$ e $1 - p = 2/3$, rispettivamente. Pertanto, $E(T) = 1/p = 3$, $Var(T) = (1 - p)/p^2 = 6; E(S) = 1/(1-p) = 3/2$, $Var(S) = (1-(1-p))/(1-p)^2 = 3/4$.
(iii) Naturalmente, possiamo supporre che S sia stocasticamente indipendente da T. Allora $P(T = k, S = h) = P(T = k)P(S = h)$ e quindi

$$P(T = 3, S < 2) = P(T = 3, S = 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$$

Inoltre

$$P(T + S = 2|S < 2) = P(T + S = 2|S = 1) = \frac{P(T + S = 2, S = 1)}{P(S = 1)}$$
$$= \frac{P(T = 1)}{P(S = 1)} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2.$$

(iv) Se $Z = T + S$, allora $Z \in \{2, 3, \ldots\}$ e dalla formula di convoluzione, visto che T ed S sono indipendenti, si ha per $i = 2, 3, \cdots$:

$$P(Z = i) = \sum_{k=1}^{i-1} P(T = k)P(S = i - k) = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-k-1} =$$

(si osservi che deve essere $i-k \geq 1$, pertanto k deve variare tra 1 e $i-1$)

$$= \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \cdot 3^{k+1} = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \cdot 3^2 \sum_{k=1}^{i-1} \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}} \cdot 3^{k-1}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \sum_{k=1}^{i-1} 2^{k-1} = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \sum_{h=0}^{i-2} 2^{h} = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \left(\frac{1-2^{i-1}}{-1}\right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{i} (2^{i-1}-1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i}.$$

Un semplice controllo mostra che

$$\sum_{i=2}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{i} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\right] = 1.$$

Infatti:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} - 2\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} = \left(\frac{1}{1-2/3} - 2/3 - 1\right) - 2\left(\frac{1}{1-1/3} - 1/3 - 1\right)$$

$$= 4/3 - 2(1/6) = 1.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} cov(2(T+S), 3S) =& E[6(T+S)S] - 6E(T+S)E(S) = \\ =& 6[E(TS) + E(S^2) - E(T)E(S) - E^2(S)] \end{aligned}$$

$$= 6Var(S) = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2},$$

in quanto $E(TS) - E(T)E(S) = 0$, essendo T ed S indipendenti.
(iv) Si ha:

$$P(T < 3S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T < 3k) P(S = k).$$

Intanto, $P(T < 3k) = P(T \leq 3k-1) = 1 - P(T > 3k-1) = 1 - (1 - 1/3)^{3k-1}$.
Quindi:

$$P(T < 3S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T < 3k) P(S = k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3k-1}\right) \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \\
&= 1 - 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{27} \cdot \frac{1}{3}\right)^{k} = 1 - 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{81}\right)^{k} \\
&= 1 - 3 \left(\frac{1}{1 - 8/81} - 1\right) = 1 - 3 \left(\frac{81 - 73}{73}\right) = \frac{49}{73} = 0.671
\end{aligned}
$$