1 Primi esercizi sulle Variabili Aleatorie

Esercizio 1.1. *(Baldi, 2.5, 3.5)*
Un' urna contiene 112 dadi di cui 56 equilibrati e 56 manipolati in modo tale che si ottenga 1 con probabilità $\frac{1}{2}$ e tutti gli altri valori con probabilità $\frac{1}{10}$.

1 *Un dado viene estratto a caso e lanciato una volta. Calcolare la probabilità di ottenere 3;*

2 *Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Calcolare la probabilità di ottenere 2 e 3. Sapendo di aver ottenuto 2, 3, qual è la probabilità di aver estratto un dado truccato?*

3 *Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Siano X ed Y le variabili aleatorie che indicano il risultato dei due lanci. Si tratta di variabili aleatorie indipendenti?*

Soluzione

1 Indicato con A l' evento " si estrae un dado equilibrato", allora $\{A, A^c\}$, formano una partizione tale che $P(A) = P(A^c) = \frac{56}{112} = \frac{1}{2}$. Sia ora B l' evento " si ottiene 3 al primo lancio." Allora, dal teorema delle probabilità totali

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{2}{15}.$$

2 Indicato con C " si ottiene 2 al secondo lancio", sempre dal teorema delle probabilità totali

$$\begin{aligned} P(B \cap C) =& P(B \cap C|A)P(A) + P(B \cap C|A^c)P(A^c) = \\ =& P(B|A)P(C|A)P(A) + P(B|A^c)P(C|A^c)P(A^c) = \\ =& \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{17}{900}. \end{aligned}$$

Inoltre dalla formula di Bayes

$$P(A^c|B \cap C) = \frac{P(B \cap C|A^c)P(A^c)}{P(B \cap C)} = \frac{\frac{1}{10}\frac{1}{10}\frac{1}{2}}{\frac{17}{900}} = \frac{9}{34}.$$

3 Siano X ed Y le variabili aleatorie che indicano il risultato dei due lanci. Calcoliamo la densità del vettore (X, Y) nel punto $(3, 2)$.

$$P(X = 3, Y = 2) = P(B \cap C) = \frac{17}{900}.$$

Dal Punto 1 sappiamo che $P(X = 3) = P(B) = \frac{2}{15}$ e, allo stesso modo, si ottiene $P(Y = 2) = P(C) = \frac{2}{15}$. Quindi X ed Y non sono indipendenti dal momento che

$$\frac{17}{900} = \frac{17}{900} P(X = 3, Y = 2) \neq P(X = 3)P(Y = 2) = \frac{4}{225}.$$

Esercizio 1.2. *(Baldi, 2.4, 3.4)*
Un giocatore gioca al lotto il numero 67. Calcolare

1 *la probabilità p che il 67 esca in una singola prova;*

2 *la probabilità che dopo 30 estrazioni il 67 non sia ancora uscito;*

3 *supponendo che nelle prime 100 estrazioni il 67 non sia ancora uscito, la probabilità che esca dopo la 130-sima estrazione;*

4 *la probabilità che esca almeno 6 volte nelle prime 50 estrazioni.*

Soluzione

1 Nel lotto si etraggono 5 numeri senza rimpiazzo da un' urna che contiene i primi 90 numeri naturali. Quindi è un modello ipergeometrico in cui un gruppo contiene solo il 67 e pertanto

$$p = \frac{\binom{1}{1}\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{89!}{85!4!}}{\frac{90!}{85!5!}} = \frac{1}{18}.$$

2 Indichiamo con T la variabile aleatoria che indica in numero di settimane necessarie per ottenere 67 su una estrazione. T rappresenta il tempo di primo successo (esce 67 la prima volta) in uno schema di prove ripetute (estrazioni settimanali) indipendenti (le estrazioni settimanali possono considerarsi indipendenti). Quindi T è una variabile aleatoria geometrica modificata di parametro $\frac{1}{18}$, ovvero di densità

$$p_T(k) = \frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Allora $P(T > 30) = \left(\frac{17}{18}\right)^{30}$.

3 Dobbiamo calcolare $P(T > 130|T > 100)$. Utilizzando la proprietà di mancanza di memoria si ottiene

$$P(T > 130|T > 100) = P(T > 30) = \left(\frac{17}{18}\right)^{30}$$

Nel caso in cui non si ricordi bene come funziona questa proprietà si può sempre usare la definizione di probabilità condizionata:

$$\begin{aligned} P(T > 130|T > 100) =& \frac{P(T > 130, T > 100)}{P(T > 100)} = \frac{P(T > 130)}{P(T > 100)} = \\ =& \frac{\left(\frac{17}{18}\right)^{130}}{\left(\frac{17}{18}\right)^{100}} = \left(\frac{17}{18}\right)^{30}. \end{aligned}$$

4 Indichiamo con X la variabile aleatoria il numero volte in cui è uscito 67 in 50 estrazioni. Allora $X \sim Bin(50, \frac{1}{18})$. Dobbiamo calcolare $P(X \geq 6)$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) =& \sum_{k=6}^{50} \binom{50}{k} \left(\frac{1}{18}\right)^k \left(\frac{17}{18}\right)^{50-k} = \\ =& 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{50}{k} \left(\frac{1}{18}\right)^k \left(\frac{17}{18}\right)^{50-k} = ... \end{aligned}$$

Esercizio 1.3. *(Baldi, 2.9, 3.9)*
Un collezionista ha raccolto già 40 delle 100 figurine di un album. Egli acquista una busta contenente 24 figurine, tutte diverse tra loro. Qual è la probabilità che tra queste ve ne siano più di 20 (≥ 20) di quelle che già possiede?

Soluzione
Possiamo assimilare il modello a quello di estrazione da un' urna che contiene due tipi di oggetti 40 di tipo 1 e 60 di tipo 2. Se il pacchetto da 24 è asseblato casualmente prendendo senza rimpiazzo 24 oggetti dall' urna descritta, allora, indicata con X la variabile aleatoria che conta il numero di figurine già in possesso del collezionista, X risulta essere una variabile aleatoria ipergeometrica. Si vuole calcolare $P(X \geq 20)$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 20) =& \sum_{k=20}^{24} \frac{\binom{40}{k}\binom{60}{24-k}}{\binom{100}{24}} = \\ =& \frac{1}{\binom{100}{24}} \left(\binom{40}{20}\binom{60}{4} + \binom{40}{21}\binom{60}{3} + ... + \binom{40}{24}\binom{60}{0} \right) = ... \end{aligned}$$

PER CASA: ESERCIZIO 2.7, 3.7 BALDI

Esercizio 1.4. *(Baldi, 2.6, 3.6)*
In un mazzo di n chiavi si cerca quella giusta provandole a caso una dopo l' altra e mettendo da parte le chiavi già provate. Qual è lsa probabilità che si debbano fare esattamente k (con $k \leq n$) tentativi?

Soluzione
Sia T la variabile aleatoria che indica il numero di tentativi necessari per ottenere la chiave giusta. T rappresenta il tempo di primo successo in uno schema di prove ripetute **non indipendenti** e quindi la sua legge non è geometrica modificata. Però possiamo calcolarla utilizzando la stessa procedura. Intanto notiamo che $Im(T) = \{1, 2, ..., n\}$ e dunque, se X_k è la variabile aleatoria ipergeometrica che conta il numero di successi (essendo il successo " si estrae la chiave giusta") su k estrazioni, per ogni $k \in \{1, 2, ..., n\}$ possiamo identificare gli eventi $\{T > k\}$ e $\{X_k = 0\}$ e dunque

$$P(T > k) = P(X_k = 0) = \frac{\binom{1}{0}\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}\frac{(n-k)!k!}{n!} = \frac{n-k}{n}.$$

Pertanto

$$P(T = k) = P(T > k-1) - P(T > k) = \frac{n-(k-1)}{n} - \frac{n-k}{n} = \frac{1}{n}$$

ovvero T è una variabile aleatoria uniforme sull' insieme $\{1, 2, ..., n\}$.

Esercizio 1.5. *(Abundo, 1.77, punto(i))*
Si consideri il vettore aleatorio $(X, Y) \in \{-1, 2\} \times \{-1, 1, 2\}$ tale che

$$P(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{12},\ P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{6},\ P(X = -1, Y = 2) = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 2, Y = -1) = \frac{1}{12},\ P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4}\ .$$

Determinare le distribuzioni marginali di X e Y; si tratta di v.a. indipendenti?

Calcolare $P(X + Y = 1|Y = 2)$.

Soluzione
L'unica probabilità mancante è $P(X = 2, Y = 2)$; sottraendo ad 1 la somma delle altre probabilità , si ottiene $P(X = 2, Y = 2) = 1/6$. Si ha, per $x \in \{-1, 2\}$:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \{-1,1,2\}} P(X = x, Y = y)$$

Quindi

$P(X = -1) = 1/12+1/6+1/4 = 1/2, \; P(X = 2) = 1/12+1/4+1/6 = 1/2,$

ovvero $X \sim Uni(\{-1, 2\})$. Analogamente, per $y \in \{-1, 1, 2\}$:

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \{-1,2\}} P(X = x, Y = y)$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(Y = -1) =& 1/12 + 1/12 = 1/6, \\ P(Y = 1) =& 1/6 + 1/4 = 5/12, \\ P(Y = 2) =& 1/4 + 1/6 = 5/12. \end{aligned}$$

Le v.a. X e Y non sono indipendenti, in quanto, ad esempio

$$1/4 = P(X = -1, Y = 2) \neq P(X = -1)P(Y = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{24} \; .$$

Inoltre:

$$P(X+Y = 1|Y = 2) = \frac{P(X + Y = 1, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{P(X = -1, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5}$$

Esercizio 1.6. *(Abundo, 1.67, punti (i), (ii))*
Data la funzione:

$$p(x, y) = \begin{cases} c \, \frac{2^x}{x!} & \textit{se } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \; y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Determinare il valore di $c > 0$ affinché $p(x, y)$ sia la densità di una v.a. discreta bidimensionale (X, Y).
(ii) Trovare le densità marginali di X e Y. Si tratta di densità note? X e Y sono stocasticamente indipendenti? Scrivere inoltre esplicitamente la funzione di ripartizione $F_Y(y)$ di Y.

Soluzione
(i) Affinché $p(x, y)$ sia una densità, deve essere:

$$\sum_{y=1}^{6} \sum_{x=0}^{\infty} c \frac{2^x}{x!} = 1,$$

ovvero $6c \cdot e^2 = 1$, da cui si ricava $c = e^{-2}/6$.

(ii) Per le densità marginali, si ha, per $x = 0, 1, 2, \cdots$:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y=1}^{6} c\frac{2^x}{x!} = e^{-2}\frac{2^x}{x!}$$

e quindi $X \sim \text{Poisson}(2)$. Inoltre, per $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{6}e^{-2}\frac{2^x}{x!} = \frac{1}{6}$$

Pertanto, si riconosce che $Y \sim \text{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$. Le v.a. X e Y sono indipendenti, essendo $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$. La funzione di distribuzione di Y è:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & sey < 1 \\ 1/6 & \text{se } 1 \leq y < 2 \\ 1/3 & \text{se } 2 \leq y < 3 \\ 1/2 & \text{se } 3 \leq y < 4 \\ 2/3 & \text{se } 4 \leq y < 5 \\ 5/6 & \text{se } 5 \leq y < 6 \\ 1 & \text{se } y \geq 6 \end{cases}$$

Esercizi da fare (i punti che non contengono medie ne calcoli con le congiunte):
ABUNDO 1.34, 1.38, 1.58, 1.60

References