1 Esercizi su Spazi di Probabilità Legge Ipergeometrica, Legge Binomiale

Esercizio 1.1. *(Baldi, 1.10, 2.10)*
Un giocatore di poker riceve all' inizio del gioco 5 carte da un mazzo di 52. Calcolare:

1 *la probabilità che riceva almeno 2 assi;*

2 *la probabilità che riceva 5 carte dello stesso seme;*

3 *la probabilità che riceva un poker servito.*

Soluzione

1 Indicato con A l' evento " riceve almeno due assi", allora $A = A_2 \cup A_3 \cup A_4$, dove $A_k =$ " riceve esattamente k assi". Osserviamo che gli eventi A_k sono disgiunti e quindi

$$P(A) = \sum_{k=2}^{4} P(A_k).$$

Per calcolare $P(A_k)$ utilizziamo la distribuzione ipergeometrica. Dividiamo le 52 carte in due gruppi disgiunti, il primo composto dai 4 assi ed il secondo dalle restanti 48 carte. Allora $P(A_k)$ coincide con la probabilità di estrarre senza rimetterle nel mazzo k carte dal primo gruppo e dunque

$$P(A_k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{5-k}}{\binom{52}{5}}$$

e quindi

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{5-2}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{5-3}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{5-4}}{\binom{52}{5}}.$$

2 Indicato con B l' evento " riceve 5 carte dello stesso seme", allora $B = \cup_{k=1}^{4} B_k$, dove

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{"riceve 5 carte cuori"}; \\ B_2 &= \text{"riceve 5 carte quadri"}; \\ B_3 &= \text{"riceve 5 carte picche"}; \\ B_4 &= \text{"riceve 5 carte fiori"}. \end{aligned}$$

Anche in questo caso $B_i \cap B_j = \phi$ se $i \neq j$ e quindi

$$P(B) = \sum_{k=1}^{4} P(B_k).$$

Calcoliamo $P(B_1)$. A tale scopo dividiamo le 52 carte in due gruppi disgiunti, il primo composto dalle 13 carte di cuori ed il secondo dalle restanti 39 carte. Allora

$$P(B_1) = \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{0}}{\binom{52}{5}}$$

Inoltre questa probabilità è la stessa per tutti gli altri eventi B_k. Quindi

$$P(B) = 4P(B_1) = 4\frac{\binom{13}{5}\binom{39}{0}}{\binom{52}{5}} \simeq 2 \times 10^{-3}.$$

3 Osserviamo che si può ricevere un poker servito in 13 modi diversi, tanti quanti sono i valori possibili delle carte. Quindi, indicato con C l' evento " riceve un poker servito", allora $C = \cup_{k=1}^{13} C_k$, dove $C_k =$ "riceve un poker di k servito". Come nei punti precedenti, si tratta di una unione disgiunta e quindi

$$P(C) = \sum_{k=1}^{13} P(C_k).$$

Per calcolare $P(C_1)$ dividiamo le 52 carte in due gruppi disgiunti, il primo composto dai 4 assi ed il secondo dalle restanti 48 carte. Allora

$$P(C_1) = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$$

ed, essendo tutti gli C_k equiprobabili, si ottiene

$$P(C) = 13 \times \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}.$$

Esercizio 1.2. *(Baldi, 1.11, 2.11)*
Un giocatore gioca al lotto i numeri 1,2,3. Per aiutare la fortuna, nottetempo aggiunge all' urna 3 palline supplementari con i numeri 1,2,3. Calcolare la probabilità che il trucco venga scoperto.

Soluzione Il trucco viene scoperto se escono almeno 2 simboli uguali. Quindi, indicando con $A =$ "il trucco viene scoperto", allora $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, dove $A_i = \{$ esce due volte $i, \}$, $i = 1, 2, 3$. Per calcolare $P(A)$ utilizzo la formula di inclusione esclusione, dal momento che gli eventi in questione non sono a due a due disgiunti. Infatti, ad esempio, $(1, 1, 2, 2, 3) \in A_1 \cap A_2$. Quindi

$$P(A) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3).$$

Per calcolare gli addendi utilizziamo la distribuzione ipergeometrica. Per calcolare da $P(A_i)$ Dividiamo i 93 numeri in due gruppi disgiunti, il primo composto da $\{i, i\}$ ed il secondo dai 91 numeri rimanenti. Allora

$$P(A_i) = \frac{\binom{2}{2}\binom{91}{3}}{\binom{93}{5}} \simeq 2.34 \times 10^{-3}.$$

Per calcolare $P(A_i \cap A_j)$ i 93 numeri si suddividono nei gruppi $\{i, i, j, j\}$ e gli 89 numeri rimanenti. Allora

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{\binom{4}{4}\binom{89}{1}}{\binom{93}{5}} \simeq 1.71 \times 10^{-6}.$$

Concludendo, poiché $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$, si ottiene

$$P(A) = 3 \times 2.34 \times 10^{-3} - 3 \times 1.71 \times 10^{-6} \simeq 0.007$$

Esercizio 1.3. *(Baldi, 1.15, 2.15)*
Un'urna contiene 2 palline rosse e 4 nere. Due giocatori A e B giocano nel modo seguente: le palline vengono estratte l' una dopo l' altra e messe da parte. A vince se l' ultima pallina è rossa, altrimenti vince B. Calcolare

1 *la probabilità che A vinca;*

2 *la probabilità che A vinca sapendo che la prima pallina estratta sia rossa;*

3 *la probabilità che A vinca e che la prima pallina estratta sia rossa.*

Soluzione
Osserviamo che gli eventi di interesse dipendono dall' ordine di estrazione. Formalmente abbiamo un' urna che contiene due tipi di oggetti 2 di tipo 1 e 4 di tipo 2. A vince se l'ultima pallina estratta è di tipo 1.

1 Se ci si concentra sulle prime 5 estrazioni, l'evento A_6="la sesta pallina estratta è rossa" coincide con l' evento "su 5 estrazioni senza rimpiazzo esce una sola pallina rossa". Dunque utilizzando la distribuzione ipergeometrica ottengo

$$P(A_6) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{4}}{\binom{6}{5}} = \frac{1}{3}.$$

2 Se sappiamo che la prima pallina è rossa, allora nell' urna resta una sola pallina rossa e 4 palline nere. Quindi per calcolare la probabilità che la sesta estratta sia rossa si ragiona come nel punto precedente, ovvero si identifica l' evento A="la sesta pallina estratta è rossa" con l' evento "su 4 estrazioni senza rimpiazzo escono 4 palline nere":

$$P(A_6|A_1) = \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{4}}{\binom{5}{4}} = \frac{1}{5}.$$

3 Utilizzando la formula inversa della probabilità condizionata si ottiene

$$P(A_1 \cap A_6) = P(A_6|A_1)P(A_1) = \frac{1}{5}\frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

Esercizio 1.4. *Un' urna contiene 3 biglie, delle quali 2 nere ed una bianca. Si estrae una biglia a caso. Se è bianca la si rimette nell' urna aggiungendo un' altra biglia bianca. Se è nera la si rimette nell' urna aggiungendo altre 2 biglie nere. Si procede poi ad una seconda estrazione. Calcolare*

1 *la probabilità che la seconda biglia estratta sia nera;*

2 *sapendo che seconda biglia estratta è nera, la probabilità che la prima biglia estratta sia nera;*

3 *calcolare la densità della variabile aleatoria X che conta in numero di palline bianche estratte sulle 2 estrazioni.*

Soluzione

Siano $B_i = \{$ biglia bianca all' i-sima estrazione$\}, i = 1, 2$. Evidentemente $B_i^c = \{$ biglia nera all' i-sima estrazione$\}, i = 1, 2$.

1 Si vuole calcolare $P(B_2^c)$. A tale proposito utilizzo il teorema delle probabilità totali. Sappiamo che $\{B_1, B_1^c\}$ formano una partizione ed inoltre sono note $P(B_1) = \frac{1}{3}$, $P(B_1^c) = \frac{2}{3}$, $P(B_2^c|B_1) = \frac{2}{4}$, $P(B_2^c|B_1^c) = \frac{4}{5}$. Di conseguenza

$$P(B_2^c) = P(B_2^c|B_1)P(B_1) + P(B_2^c|B_1^c)P(B_1^c) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{10}.$$

2 Dalla formula di Bayes

$$P(B_1^c|B_2^c) = \frac{P(B_2^c|B_1^c)P(B_1^c)}{P(B_2^c)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{10}} = \frac{8}{21}.$$

3 I valori che X può assumere sono $Im(X) = \{0, 1, 2\}$. Per calcolare la densità dobbiamo sempre utilizzare il teorema delle probabilità totali:

(a)

$$p_X(0) = P(X = 0) = P(X = 0|B_1)P(B_1) + P(X = 0|B_1^c)P(B_1^c).$$

Osserviamo che $P(X = 0|B_1) = 0$ $P(X = 0|B_1^c) = P(B_2^c|B_1^c) = \frac{4}{5}$ e quindi

$$p_X(0) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

(b) Analogamente a sopra

$$p_X(1) = P(X = 1|B_1)P(B_1) + P(X = 1|B_1^c)P(B_1^c),$$

con $P(X = 1|B_1) = P(B_2^c|B_1) = \frac{1}{2}$ $P(X = 1|B_1^c) = P(B_2|B_1^c) = \frac{1}{5}$ e quindi

$$p_X(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{10}.$$

(c)

$$p_X(2) = P(X = 2|B_1)P(B_1) + P(X = 2|B_1^c)P(B_1^c),$$

con $P(X = 2|B_1) = \frac{1}{2}$ e $P(X = 2|B_1^c) = 0$ e quindi

$$p_X(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 1.5. *(Abundo, 1.51)*
Supponiamo di aver una moneta truccata in modo che la probabilità che esca testa ad ogni lancio è $\frac{1}{4}$. Si lanci la moneta 4 volte. Calcolare

1 *la probabilità che esca testa esattamente 2 volte;*

2 *la probabilità che che esca testa almeno una volta;*

3 *la probabilità che si abbia la sequenza (T, C, T, C) esattamente in quest'ordine.*

Soluzione
Sia X la v.a. che conta il numero di teste su 4 lanci. Allora $X \sim Bin(4, \frac{1}{4})$.

1 la probabilità che esca testa esattamente 2 volte è pari a

$$P(X = 2) = p_X(2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}.$$

2 la probabilità che che esca testa almeno una volta è pari a

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

3 Per calcolare la probabilità che si abbia la sequenza (T, C, T, C) esattamente in quest'ordine si usa il fatto che le prove successive sono indipendenti. Dunque, se si indica con T_i l' evento "esce testa all'i-simo lancio" $i = 1, 2, 3, 4$, allora $\{T_i\}_{i\in\{1,2,3,4\}}$ sono indipendenti e quindi

$$\begin{aligned} P(T, C, T, C) =& P(T_1 \cap T_2^c \cap T_3 \cap T_4^c) = P(T_1)P(T_2^c)P(T_3)P(T_4^c) = \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{256}. \end{aligned}$$

Esercizi da fare:
ABUNDO 1.32, 1.40, 1.54.