1 Esercizi su Assiomi, Probabilità condizionale, Indipendenza

Esercizio 1.1. *Si lanciano due dadi e si considerano gli eventi* $A =$ *"escono due facce uguali" e* $B =$ *"la somma delle facce è minore di 5". Calcolare* $P(A), P(A \cap B), P(A \cup B), P(A^c \cap B^c)$.

Soluzione

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}, i = 1,2\}, \#\Omega = 36$$

con la distribuzione di probabilità uniforme. Inoltre

$$\begin{aligned}
A =&\{(1,1),(2,2),(3,3),....,(6,6)\}, \#A = 6\\
B =&\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}, \quad A \cap B = \{(1,1),(2,2)\}\\
P(A) =&\frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{1}{18}\\
P(A \cup B) =&P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18}\\
P(A^c \cap B^c) =&1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}
\end{aligned}$$

Esercizio 1.2. *(Baldi, 1.3, 2.2)*
Consideriamo un'urna contenente 4 palline bianche e 3 palline nere. Si effettuano 2 estrazioni con rimpiazzo. Calcolare

1 *la probabilità che le palline estratte abbiano lo stesso colore;*

2 *la probabilità che almeno un apallina estratta sia nera.*

Soluzione

1 Se considero le palline tutte distinte tra di loro, ciascuna contrassegnata da un numero ed dal colore, posso utilizzare la distribuzione di probabilità uniforme sullo spazio

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{b_1, b_2, b_3, b_4, n_1, n_2, n_3\}, i = 1,2\}, \quad \#\Omega = 49$$

Indicato con A l' evento " le palline estratte hanno lo stesso colore", allora $A = A_1 \cup A_2$, dove $A_1 =$ " le palline estratte sono bianche", $A_2 =$ " le palline estratte sono nere". Come sottoinsiemi di Ω li possiamo rappresentare come

$$A_1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, i = 1,2\}, \quad \#A_1 = 16$$

$$A_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{n_1, n_2, n_3\}, i = 1,2\}, \quad \#A_2 = 9$$

e pertanto $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{16}{49} + \frac{9}{49} = \frac{25}{49}$.

2 Indichiamo con B l' evento " almeno una pallina è nera", allora $B = B_1 \cup B_2$, dove

$$B_1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{n_1, n_2, n_3\}\},$$

$$B_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_2 \in \{n_1, n_2, n_3\}\}.$$

A differenza del punto precedente, questi eventi non sono disgiunti, e quindi $P(B) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = \frac{3\times 7}{49} + \frac{3\times 7}{49} - \frac{9}{49} = \frac{33}{49}$. Alternativamente, poiché l' evento $B^c = A_1$ (corrisponde a "nessuna pallina è nera" ovvero "entrambe le palline sono bianche") si ottiene più agevolmente $P(B) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{16}{49} = \frac{33}{49}$.

3 Una soluzione diversa si basa sulla considerazione che, grazie al fatto che l' estrazione è con reimmissione, gli eventi

$$C_1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{b_1, b_2, b_3, b_4\}\},$$

$$C_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_2 \in \{b_1, b_2, b_3, b_4\}\},$$

sono indipendenti (DIMOSTRARE!!!!!). Inoltre $P(C_1) = P(C_2) = \frac{4}{7}$. Quindi, poiché

$$\begin{aligned} A =& (C_1 \cap C_2) \cup (C_1^c \cap C_2^c) \\ B^c =& (C_1 \cap C_2) \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} P(A) =& P(C_1 \cap C_2) + P(C_1^c \cap C_2^c) = P(C_1)P(C_2) + P(C_1^c)P(C_2^c) = \\ &= \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}, \\ P(B) =& 1 - P(B^c) = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{33}{49} \end{aligned}$$

Esercizio 1.3. *(Baldi, 1.6, 2.4)*
I componenti prodotti da una ditta possono presentare due tipi di difetti, con percentuale del 3% e 7% ripsettivamente. Si può assumenre che tali difetti si presentino in modo indipendente l'uno dall'altro. Calcolare

1 *la probabilità che un componente presenti entrambi i difetti;*

2 *la probabilità che un componente sia difettoso;*

3 *la probabilità che il componente presenti il difetto 1, sapendo che è difettoso;*

4 *la probabilità che presenti un solo difetto, sapendo che è difettoso.*

Soluzione
Siano $A =$ "il componente presenta il difetto 1" e
$B =$ "il componente presenta il difetto 2".
Sappiamo che $P(A) = \frac{3}{100}$, $P(B) = \frac{7}{100}$ e $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

1 "il componente presenta entrambi i difetti" $= A \cap B \to P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{21}{10^4}$

2 "il componente è difettoso" $= A \cup B$ e dunque

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^2} - \frac{21}{10^4} = \frac{979}{10^4}$$

3

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{979}{10^4}} = \frac{300}{979}.$$

4 "il componente presenta un solo difetto" $= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B))$, con $A \cap B^c)$ e $(A^c \cap B)$ disgiunti; dunque

$$\begin{aligned} P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B))|A \cup B) &= P(A \cap B^c|A \cup B) + P(A^c \cap B|A \cup B) = \\ &= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cup B)} + \frac{P(A^c \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)P(B^c)}{P(A \cup B)} + \frac{P(A^c)P(B)}{P(A \cup B)} = \\ &= \frac{\frac{3}{100}\frac{93}{100}}{\frac{979}{10^4}} + \frac{\frac{97}{100}\frac{7}{100}}{\frac{979}{10^4}} = \frac{958}{979} \end{aligned}$$

Alternativamente, posto $C = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B))$, poiché

$$C^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c))$$

$$\begin{aligned} P(C|A \cup B) =& 1 - P(C^c|A \cup B) = 1 - (P((A \cap B)|A \cup B) + \\ &+ P((A^c \cap B^c)|A \cup B)) = \\ &= 1 - P((A \cap B)|A \cup B) = 1 - \frac{\frac{3}{100}\frac{7}{100}}{\frac{979}{10^4}} = \frac{958}{979} \end{aligned}$$

Nota: nell' ultimo punto abbiamo usato il fatto che la probabilità condizionata è una misura di probabilità che quindi soddisfa gli assiomi e le loro conseguenze. In particolare è additiva su insiemi disgiunti.

Esercizio 1.4. *(Baldi, 1.4, 2.3)*
Due numeri vengono estratti, senza reimbussolamento, da un' urna contenente sei palline numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità che i numeri estratti siano consecutivi?

Soluzione
$A_i = \{$ il primo numero estratto è il numero $i\}, i = 1, ..., 6$
$C = \{$ si estraggono due numeri consecutivi$\}$. Chiaramente $\{A_1, ..., A_6\}$ è una partizione tale che $P(A_i) = \frac{1}{6}, i = 1, ..., 6$. Inoltre sappiamo facilmente assegnare $P(C|A_i), i = 1, ..., 6$. Infatti

$$P(C|A_i) = \frac{1}{5},\ i \in \{1, 6\}$$
$$P(C|A_i) = \frac{2}{5},\ i \in \{2, 3, 4, 5\}$$

Quindi, dal teorema delle prob. totali

$$P(C) = \sum_{i=1}^{6} P(C|A_i)P(A_i) = \frac{1}{6}\left(2 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3}$$

Esercizio 1.5. *(Baldi, 1.12, 2.12)*
Tre urne numerate da 1 a 3 sono inizialmente vuote. Esse sono poi riempite con n palline che vengono messe nelle urne successivamente, ogni volta scegliendo in modo casuale una delle urne. Calcolare

1 *la probabilità che l' urna 1 resti vuota;*

2 *la probabilità che le urne 1 e 2 restino vuote;*

3 *la probabilità che una delle urne resti vuota.*

Soluzione
Costruiamo uno spazio di probabilità come l' insieme di tutte le sequenze di n elementi in cui ciascuna componente appartiene all'insieme $\{1, 2, 3\}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \cdots & n \\ \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{array}$$

dove, ad esempio, $\omega_i = 2$ significa che l' i-sima pallina è stata messa nell'urna 2. In tal modo ottengo tutte le possibili realizzazzioni del fenomeno da studiare. Quindi posso utilizzare la distribuzione di probabilità uniforme sullo spazio

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, 3\}, i = 1, 2, ..., n\}, \quad \#\Omega = 3^n.$$

Consideriamo gli eventi $A_j =$ "l' urna j resta vuota" , $j = 1, 2, 3$, allora

$$A_j = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) : \omega_i \neq j, i = 1, 2, ..., n\}, \quad \#A_j = 2^n.$$

1

$$A_1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) : \omega_i \in \{2, 3\}, i = 1, 2, ..., n\}$$

e quindi $P(A_1) = \frac{2^n}{3^n}$.

2

$$\begin{aligned}&\text{"le urne 1 e 2 restano vuote"} = A_1 \cap A_2 = \\ &\{\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) : \omega_i = 3, i = 1, 2, ..., n\} \quad \#A_1 \cap A_2 = 1\end{aligned}$$

e quindi $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3^n}$.

3 "almeno un' urna resta vuota" $= A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
Richiamo di teoria:Principio di inclusione-esclusione con 3 eventi

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =& P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P((A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \\ &\quad -P(A_2 \cap A_3) + P((A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

Tornando al nostro esercizio, poiché $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \times \frac{2^n}{3^n} - 3 \times \frac{1}{3^n} = 3 \times \frac{2^n - 1}{3^n}.$$

Esercizio 1.6. *Si lanciano 3 monete regolari, e si considerano gli eventi* $A_1 =$ *"esce Testa almeno 2 volte",* $A_2 =$ *"esce Testa un numero pari volte" e* $A_3 =$ *"esce Croce al primo lancio". Verificare o confutare l' indipendenza degli eventi* (A_1, A_2, A_3).

Soluzione

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{T, C\}, i = 1, 2, 3\}, \#\Omega = 8$$

con la distribuzione di probabilità uniforme. Inoltre

$$\begin{aligned}A_1 =& \{(T, T, T), (T, T, C), (C, T, T), (T, C, T)\}, \#A_1 = 4 \\ A_2 =& \{(T, T, C), (C, T, T), (T, C, T), (C, C, C)\}, \#A_2 = 4 \\ A_3 =& \{(C, C, C), (C, T, T), (C, C, T), (C, T, C)\}, \#A_2 = 4,\end{aligned}$$

quindi $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$. Controlliamo se la proprietà di fattorizzazione si verifica per ogni sottosequenza di (A_1, A_2, A_3)., Intanto $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (C, T, T)$ e quindi

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Ma $A_1 \cap A_2 = \{(T, T, C), (C, T, T), (T, C, T)\}$ e quindi

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \neq P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4}.$$

Concludiamo che gli eventi (A_1, A_2, A_3) non sono indipendenti. Esercizi da fare:
ABUNDO 1.24, 1.30 (punti 1, 2), 1.33, 1.40, 1.42 (punti 1, 2), 1.52 (punti 1, 2), 1.54.