

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 2

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO INTEGRALE)

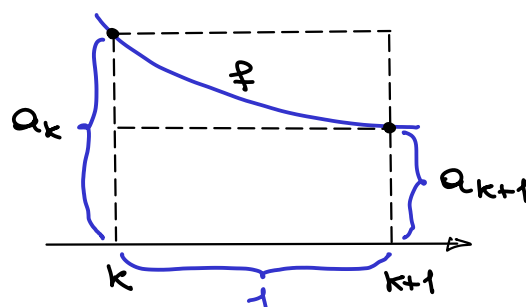
Sia $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione decrescente e ≥ 0 in $[1, +\infty)$ e sia $a_k = f(k) \forall k \geq 1$. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ è convergente } \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ è convergente.}$$

dim. Confrontando le aree si ha che

$$f(k+1) = a_{k+1} \leq \underbrace{\int_k^{k+1} f(x) dx}_{b_k} \leq \underbrace{a_k}_{f(k)} = a_k$$

area rettangolo inscritto area rettangolo circoscritto



Inoltre

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Quindi applicando il teorema del confronto rispetto a $a_{k+1} \leq b_k$ e $b_k \leq a_k$ si ottiene la tesi. $\square$

ESEMPI

- Dai risultati di convergenza degli integrali impropri, per il confronto integrale si ha che

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \log^\beta(k)} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1 \vee (\alpha = 1 \wedge \beta > 1).$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin(\frac{1}{k}) - \arctg(\frac{1}{k}))$ converge per conf. asintotico

$$\sin(\frac{1}{k}) - \arctg(\frac{1}{k}) \sim \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k^3} \leftarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ converge } (\alpha=3>1)$$

$$\sin(x) - \arctg(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^3) \right) = \frac{x^3}{6} + O(x^3)$$

TEOREMA (CRITERIO DELLA RADICE)

Sia $\{a_k\}$ succ. in $\mathbb{R}$ con $a_k \geq 0$ e $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = L \in [0, +\infty]$.

- 1) Se $L < 1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente.
- 2) Se $L > 1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.
- 3) Se $L = 1$ allora il criterio è inconcludente.

dim. Caso 1) Se $L < 1$ allora per $\varepsilon = \frac{1-L}{2} > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall k \geq k_0 \quad 0 \leq \sqrt[k]{a_k} < L + \varepsilon = \frac{1+L}{2} < 1 \Rightarrow a_k < \left(\frac{1+L}{2}\right)^k$$

e per confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{1+L}{2} < 1$ anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente.

Caso 2) Se $L > 1$ allora definitivamente $\sqrt[k]{a_k} > 1$
da cui $a_k > 1$ e quindi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

Caso 3) Sia $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ con $\alpha > 0$ allora $\sqrt[k]{a_k} \rightarrow L = 1$ e
 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$. □

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\{a_k\}$ succ. in $\mathbb{R}$ con $a_k > 0$ e $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L \in [0, +\infty]$.

- 1) Se $L < 1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente.
- 2) Se $L > 1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.
- 3) Se $L = 1$ allora il criterio è inconcludente.

ESEMPI

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\alpha}}{k!}$ è convergente.

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{\alpha}}{\underbrace{(k+1)!}_{k+1}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{k^{\alpha}} = \underbrace{\left(\frac{1}{k+1}\right)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\alpha}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0 < 1.$$

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ è divergente.

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{\underbrace{(k+1)!}_{k+1}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e > 1.$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2}$ è convergente.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{k^2}{k}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

- $\sum_{k=0}^{\infty} (k^3 + k + 1) \sin\left(\frac{1}{3^k}\right)$ è convergente.

Notiamo che

$$0 < (k^3 + k + 1) \sin\left(\frac{1}{3^k}\right) \sim k^3 \cdot \frac{1}{3^k} \quad \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \sin(x) \sim x \text{ per } x \rightarrow 0 \end{matrix}$$

Quindi per il confronto asintotico basta studiare la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$. Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} = \frac{(k^{1/k})^3}{3} \rightarrow \frac{1}{3} < 1 \quad k^{1/k} = \exp\left(\frac{\log k}{k}\right) \rightarrow e^0 = 1$$

Così la serie data è convergente.

Vediamo ora qualche criterio di convergenza per serie a termini di segno variabile.

TEOREMA (CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA)

Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

ASSOLUTA CONVERGENZA

CONVERGENZA SEMPLICE

dim. Definiamo due nuove successioni

$$0 \leq a_k^+ = \frac{|a_k| + a_k}{2} = \begin{cases} a_k & \text{se } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

$$0 \leq a_k^- = \frac{|a_k| - a_k}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } a_k \geq 0 \\ -a_k & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

Allora

$$|a_k| = a_k^+ + a_k^- \quad (1) \quad \text{e} \quad a_k = a_k^+ - a_k^- \quad (2).$$

Ne segue che per (1) $0 \leq a_k^+ \leq |a_k|$ e $0 \leq a_k^- \leq |a_k|$ e quindi per confronto le serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$ e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ sono entrambe convergenti. Così, per (2),

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- \quad \text{è convergente.} \quad \square$$

ESEMPIO

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^\alpha}$ converge per ogni $\alpha > 1$. ↗ segno "irregolare"

Dato che $\frac{|\sin k|}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ e $\alpha > 1$ per confronto la serie data è assolutamente convergente e dunque è anche convergente per il criterio della convergenza assoluta.

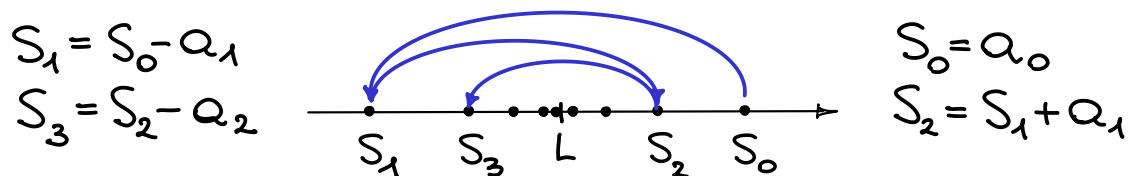
TEOREMA (CRITERIO DI LEIBNIZ)

Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}$ (con $a_k \geq 0$).

Se $a_k \geq a_{k+1}$ (decrescenza) e $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ allora

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ è convergente.

dim. Consideriamo le somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ e dimostriamo che S_n tende ad un certo limite $L \in \mathbb{R}$.



Verifichiamo che S_{2m} decresce e S_{2m-1} cresce

$$S_{2m+2} = S_{2m} + (-a_{2m+1} + a_{2m+2}) \stackrel{\leq 0}{\leq} S_{2m}$$

$$S_{2m+1} = S_{2m-1} + (a_{2m} - a_{2m+1}) \stackrel{\geq 0}{\geq} S_{2m-1}.$$

Inoltre $S_{2m}, S_{2m-1} \in [S_1, S_0]$ (limitatezza):

$$S_1 \leq S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m} \leq S_{2m} \leq S_0.$$

Quindi esistono i limiti finiti:

$$S_{2m} \rightarrow L_0 \text{ e } S_{2m-1} \rightarrow L_1.$$

Infine

$$L_0 - L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) = 0 \Rightarrow L_0 = L_1 \stackrel{d}{=} L.$$

$= a_{2n} \rightarrow 0$

Si conclude così che $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$. □

$\{S_n\} = \{S_{2n}\} \cup \{S_{2n-1}\}$

ESEMPIO

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ converge per ogni $\alpha > 0$. → segue alternato

Basta notare che $\frac{1}{k^\alpha}$ è decrescente per $k > 0$ e $\frac{1}{k^\alpha} \rightarrow 0$ e applicare il criterio di Leibniz.