

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 1

SERIE NUMERICHE

Sia $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. La SERIE NUMERICA associata è

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k}_{S_n} \stackrel{a}{=} \begin{cases} L \in \mathbb{R} & \text{convergente} \\ +\infty \vee -\infty & \text{divergente} \\ \nexists & \text{indeterminata} \end{cases}$$

$\uparrow$ termine $\uparrow$ $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ $\uparrow$ somma parziale $\uparrow$ somma della serie $\uparrow$ comportamento della serie

ESEMPI

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 0.\overline{1} = \frac{1}{9}$
 $10 \cdot 0.\overline{1} = 1.\overline{1} = 1 + 0.\overline{1}$
 $(10-1)0.\overline{1} = 1 \Rightarrow 0.\overline{1} = \frac{1}{9}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} = \text{non esiste}$

In generale è difficile trovare una formula chiusa per S_n . Ecco qualche esempio dove questo è possibile.

SERIE GEOMETRICA di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$S_n = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^n = \begin{cases} n+1 & \text{se } x=1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

$$S_n(1-x) = (1+x+\dots+x^n)(1-x) = \cancel{1+x+\dots+x^n} - \cancel{x+x^2+\dots+x^{n+1}} = 1-x^{n+1}$$

Quindi per $n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \quad \text{perché } x^{n+1} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ \text{ind} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Si noti che } 0.\overline{1} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = x \cdot \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{9} \text{ per } x = \frac{1}{10}.$$

SERIE TELESOPICHE

Scomposizione in fratti semplici:

$$\bullet \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} \text{ con } A=-1, B=1$$

$$S_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Quindi per $n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = +\infty \quad \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log(k)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log(k)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log(n+1) - \log(1)) = +\infty \end{aligned}$$

In generale se si può scrivere a_k come $b_{k+1} - b_k$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ allora

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n (b_{k+1} - b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_{k_0}) = B - b_{k_0}.$$

OSSERVAZIONI

1) Se $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$ tali che $a_k = b_k$ definitivamente allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ hanno lo stesso comportamento, ma possono avere somme diverse.

2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergono allora converge anche

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3) Se $a_k \geq 0$ allora S_m è crescente e quindi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \sup_m S_m.$$

Dunque la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ o converge o diverge.
Non può essere indeterminata.

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA)

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente allora $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

dim. Per ipotesi $S_m = \sum_{k=0}^m a_k \rightarrow L \in \mathbb{R}$ e per $m \geq 1$

$$S_m - S_{m-1} = \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k = a_m.$$

Quindi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m - \lim_{m \rightarrow \infty} S_{m-1} = L - L = 0. \quad \square$$

ESEMPI

• $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ non converge perché

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/k)}{1/k} = 1 \neq 0$$

inoltre la serie diverge a $+\infty$ perché $k \sin\left(\frac{1}{k}\right) > 0$.

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ anche se $\frac{1}{k} \rightarrow 0$

SERIE ARMONICA

la condizione è
necessaria ma
non sufficiente

Per provare la divergenza si osserva che per $n \geq 1$

$$S_{2^n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{n}{2} \rightarrow +\infty$$

Vediamo qualche criterio di convergenza per le serie a termini ≥ 0 .

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO)

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ successioni in $\mathbb{R}$ tali che

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \text{per } k \geq k_0 \in \mathbb{N}$$

allora

1) Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$.

dim. Sommando abbiamo che $\sum_{k=k_0}^n a_k \leq \sum_{k=k_0}^n b_k$ e passando al limite per $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sup_{n \geq k_0} \sum_{k=k_0}^n a_k \leq \sup_{n \geq k_0} \sum_{k=k_0}^n b_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$$

e ricordando che $\sum_{k=k_0}^{\infty}$ ha lo stesso comportamento di $\sum_{k=0}^{\infty}$ deduciamo 1) e 2). □

ESEMPI

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ è convergente perché

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2.$$

$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ per $k \geq 2$

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ per ogni $0 < \alpha \leq 1$ perché sappiamo già che diverge per $\alpha = 1$ e per $0 < \alpha < 1$ n'ha $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 1$.

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ successioni in $\mathbb{R}$ con $a_k \geq 0$ e $b_k > 0$ definitivamente e tali che $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in [0, +\infty]$ allora

- 1) Se $L \in (0, +\infty)$ ossia $a_k \overset{\text{asintoticamente equivalente}}{\sim} L b_k$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ hanno lo stesso comportamento.
- 2) Se $L=0$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.
- 3) Se $L=+\infty$ e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge allora $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge.

dim. Caso 1): per definizione di limite, per $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$

$$\exists k_0 : \underbrace{L - \varepsilon}_{\frac{1}{2}L} < \frac{a_k}{b_k} < \underbrace{L + \varepsilon}_{\frac{3}{2}L} \quad \forall k \geq k_0$$

quindi $\frac{1}{2} L b_k < a_k < \frac{3}{2} L b_k$ e la tesi segue applicando due volte il teorema del confronto.

□

ESEMPI

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k - 10 \log(k)}{k^2 + 3 \sin(k)}$ diverge per confr. asintotico
 $\forall k > k_0, 0 < \frac{3k - 10 \log(k)}{k^2 + 3 \sin(k)} = \frac{k(3 - \frac{10 \log(k)}{k})}{k^2(1 + \frac{3 \sin(k)}{k^2})} \sim \frac{3}{k}$
Note: $\frac{10 \log(k)}{k} \rightarrow 0$, $\frac{3 \sin(k)}{k^2} \rightarrow 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (\log(2^k + 1) - k \log(2))$ converge per confr. asintotico
 $\log(2^k + 1) - k \log(2) = \underbrace{\log(2^k)}_{\log(2^k)} + \log(1 + \frac{1}{2^k}) - k \log(2) \sim \frac{1}{2^k} \leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \text{ converge}$