

Analisi Matematica
Esercizi di riepilogo - Seconda parte

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 \arcsin(x/2) - \pi x^2}{\sin(\pi x)} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2} + x^3\right)^{4/x} - e^{2x}}{1 - \cos(x)}.$$

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = 4x - \log(|e^{2x} - 1|).$$

- a) Trovare tutti gli asintoti di f .
- b) Determinare gli intervalli di monotonia di f .
- c) Trovare il numero di soluzioni dell'equazione $e^{4x} = c|e^{2x} - 1|$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^4 \frac{(5 + 3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x - x^2)^\alpha} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in (0, +\infty)$,

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x^2 + x} = (x^2 + x)e^x \\ y(1) = 2e \end{cases}$$

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$,

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$