

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 25

OSSERVAZIONE

Se $f(x) \geq 0$ in $[a, b)$ allora la funzione integrale

$F(t) = \int_a^t f(x) dx$ è crescente in $[a, b)$ purché

$$a \leq t_1 < t_2 < b \Rightarrow F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \geq 0$$

La crescita di F implica l'esistenza del limite

$$\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) = \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

← l'int. improprio non può essere indeterminato

convergente divergente

TEOREMA (DEL CONFRONTO PER GLI INT. IMPROPRI)

Siano f, g funzioni definite in $[a, b)$ con

$b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tali che siano integrabili in $[a, t]$

$\forall t \in (a, b)$ e $\forall x \in [a, b)$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

1) Se $\int_a^b g(x) dx$ converge allora $\int_a^b f(x) dx$ converge.

2) Se $\int_a^b f(x) dx = +\infty$ allora $\int_a^b g(x) dx = +\infty$.

dim. Consideriamo le funzioni integrali:

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad \text{e} \quad G(t) = \int_a^t g(x) dx$$

Allora per $a \leq t < b$

$$G(t) = \int_a^t g(x) dx \geq \int_a^t f(x) dx = F(t).$$

$g \geq f$

Quindi:

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} G(t) \geq \lim_{t \rightarrow b^-} F(t) = \int_a^b f(x) dx$$

esistono per l'osservazione precedente

da cui seguono 1) e 2). □

ESEMPI

• $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log(x)} dx$ converge.

Per $x \geq 2$

$$\frac{1}{x^2 \log(x)} \leq \frac{1}{\log(2)} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Dato che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ è convergente, per il teorema del confronto converge anche l'integrale dato.

• $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} (\log(x))^2} dx = +\infty$

Per $x \rightarrow +\infty$

$\frac{3}{4} \in (\frac{1}{2}, 1)$ $\frac{x^{3/4}}{\sqrt{x} (\log(x))^2} = \frac{x^{1/4}}{(\log(x))^2} \rightarrow +\infty.$

Allora per definizione di limite, per $M=1$,

$\exists r > 2$ tale che $\forall x > r$

$$\frac{x^{3/4}}{\sqrt{x} (\log(x))^2} \geq 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{\sqrt{x} (\log(x))^2} \geq \frac{1}{x^{3/4}}.$$

Dato che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{3/4}} dx = +\infty$, per il teorema del confronto diverge anche l'integrale dato.

OSSERVAZIONE

In generale si dimostra che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log(x))^\beta} dx \text{ converge} \iff$$

$$\alpha > 1 \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1$$

e

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log(x)|^\beta} dx \text{ converge} \iff$$

$$\alpha < 1 \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1$$

TEOREMA (DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

Siano f, g funzioni definite in $[a, b)$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tali che siano integrabili in $[a, t]$ $\forall t \in (a, b)$ e $\forall x \in [a, b)$ $f(x) \geq 0, g(x) > 0$.

Se $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, +\infty)$ ossia $f(x) \sim Lg(x)$ per $x \rightarrow b^-$,
EQUIVALENZA ASINTOTICA

allora

$$\int_a^b f(x) dx \text{ converge} \iff \int_a^b g(x) dx \text{ converge.}$$

ESEMPI

- $\int_0^{+\infty} \left(\frac{3x^2+1}{4x^3+x+2} \right) dx$ è convergente? NO
 $\leftarrow > 0$ e continua in $[0, +\infty)$

Per $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{3x^2+1}{4x^3+x+2} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} \cdot \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \sim \frac{3/4}{x} \quad \alpha=1 \text{ int. in } [1, +\infty) \\ \text{è divergente}$$

- $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} \right) dx$ è convergente? SÌ
 $\leftarrow > 0$ e continua in $(0, +\infty)$

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ e $+\infty$.

Per $x \rightarrow 0^+$ $\frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}} \quad \alpha=1/2 < 1$ int. in $(0, 1]$ è convergente

Per $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^3} \quad \alpha=3 > 1$ int. in $[1, +\infty)$ è convergente

Quindi l'integrale in $(0, +\infty)$ è convergente.

- Per quali $a > 0$ l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x} \log(x)}{(x^2-1)^a} \right) dx \text{ è convergente?} \\ \leftarrow > 0 \text{ e continua in } (1, +\infty)$$

I punti da indagare sono: 1^+ e $+\infty$.

Per $x \rightarrow 1^+$

$$\frac{\sqrt{x} \log(x)}{(x^2-1)^a} \sim \frac{1 \cdot (x-1)}{2^a (x-1)^a} \sim \frac{C}{(x-1)^{a-1}} \\ \leftarrow (x+1)(x-1)$$

e l'integrale in $(1, 2]$ è convergente se $a-1 < 1$ ossia se $a < 2$.

Per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{\sqrt{x} \log(x)}{(x^2-1)^a} \sim \frac{\sqrt{x} \log(x)}{x^{2a}} = \frac{1}{x^{2a-\frac{1}{2}} \log^{-1}(x)}$$

e l'integrale in $[2, +\infty)$ è convergente se

$$2a - \frac{1}{2} > 1 \text{ oppure } 2a - \frac{1}{2} = 1 \text{ e } -1 > 1$$

ossia se $a > \frac{3}{4}$.

impossibile

Quindi l'integrale in $(1, +\infty)$ è convergente se e solo se valgono entrambe le condizioni

$$\boxed{\frac{3}{4} < a < 2}$$

- Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_{1/2}^{3/2} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x} |\sin(\pi x)|^a} \right) dx \text{ è convergente?}$$

$\leftarrow > 0$ e continua in $[1/2, 1) \cup (1, 3/2]$

Il punto da indagare per la convergenza è: $1^\pm$. Per $x \rightarrow 1^\pm$,

$$\frac{e^x}{\sqrt{x} |\sin(\pi x)|^a} \sim \frac{C}{|x-1|^a}$$

$\leftarrow \sin(\pi x) = -\sin(\pi(x-1)) \sim -\pi(x-1)$

e gli integrali in $[1/2, 1)$ e in $(1, 3/2]$ sono convergenti se e solo se $\boxed{a < 1}$.

OSSERVAZIONE

Il caso in cui la funzione da integrare cambi segno infinite volte nell'intervallo di integrazione è in generale più difficile da analizzare. Si dimostra che

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ converge} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$



ESEMPIO

$$\bullet \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx \text{ è convergente? SÌ}$$

Infatti, per il teorema del confronto l'integrale del modulo è convergente

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| dx \leq \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ convergente}$$

$|\sin(x)| \leq 1$

e per (*) anche $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$ è convergente.