

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 24

INTEGRALI IMPROPRI

Sia f una funzione definita in $[a, b)$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tale che sia integrabile in $[a, t]$ per ogni $t \in (a, b)$ allora l'INTEGRALE IMPROPRIO DI f IN $[a, b)$ è dato da

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx \stackrel{d}{=} \int_a^b f(x) dx$$

Una simile definizione vale per f definita in $(a, b]$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx \stackrel{d}{=} \int_a^b f(x) dx$$

L'integrale improprio si dice CONVERGENTE se il limite è finito, DIVERGENTE se il limite è $+\infty$ o $-\infty$, INDETERMINATO se il limite non esiste.

ESEMPI

- $\log(x)$ è continua in $D=(0, +\infty)$ e

$$\int \log(x) dx = x \log(x) - x + c$$

e quindi

$$\int_0^1 \log(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \log(x) dx$$

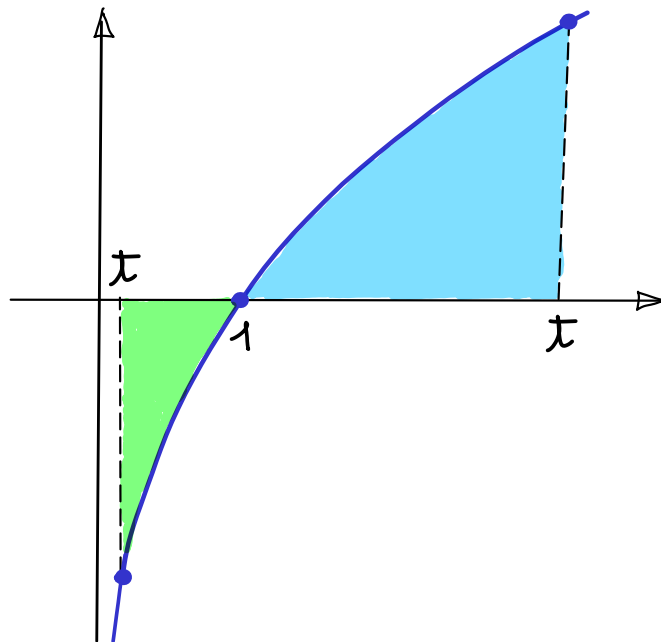
$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[x \log(x) - x \right]_x^1$$

$$= -1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} (t \log(t) - t) = -1 \text{ convergente}$$

$$\int_1^{+\infty} \log(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \log(x) dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[x \log(x) - x \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (t \log(t) - t) - (-1) = +\infty \text{ divergente}$$



- $\sin(x)$ è continua in $D = \mathbb{R}$ e

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) dx = \left[-\cos(x) \right]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\cos(x)) - (-1) = \text{indeterminato}$$

OSSERVAZIONE

Se f è definita in (a, b) allora l'integrale improprio in (a, b) è

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx\end{aligned}$$

dove $c \in (a, b)$ (non importa quale).

In particolare l'integrale improprio $\int_a^b f(x) dx$ è convergente se e solo se sono convergenti sia $\int_a^c f(x) dx$ che $\int_c^b f(x) dx$.

ESEMPI

- $\frac{x}{x^2+1}$ è continua in $D = \mathbb{R}$ e

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \text{indeterminato}$$

$$-\infty \xleftarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \log(x^2+1) \quad \frac{1}{2} \log(x^2+1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

anche se $\frac{x}{x^2+1}$ è dispari e $(-\infty, +\infty)$ è simmetrico, l'integrale improprio NON vale 0.

- $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ è continua in $D=(0, +\infty)$ e

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}} + c$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \left[-2e^{-\sqrt{x}} \right]_{0^+}^1 + \left[-2e^{-\sqrt{x}} \right]_1^{+\infty}$$

$$= (-2e^{-1} + 2) + (0 + 2e^{-1}) = 2 \text{ convergente}$$

convergente + convergente

- Per $n \in \mathbb{N}$, $I(n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = ?$

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

Per $n \geq 1$,

$$I(n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^n d(-e^{-x})$$

$$= \left[x^n (-e^{-x}) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x}) d(x^n)$$

$$= 0 - 0 + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$\downarrow n \geq 1$

$$= n \cdot I(n-1) = n(n-1) \cdot I(n-2) = \dots$$

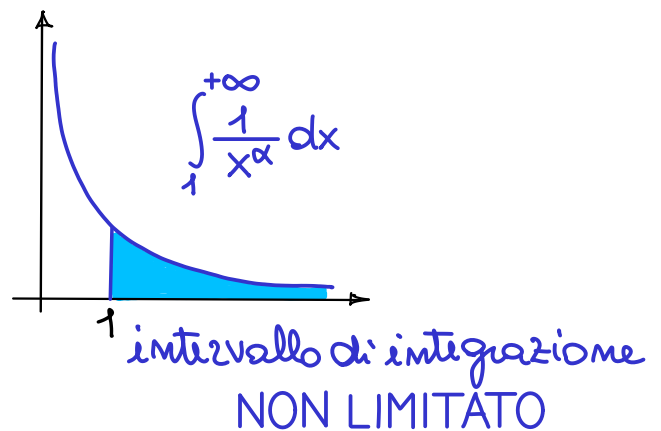
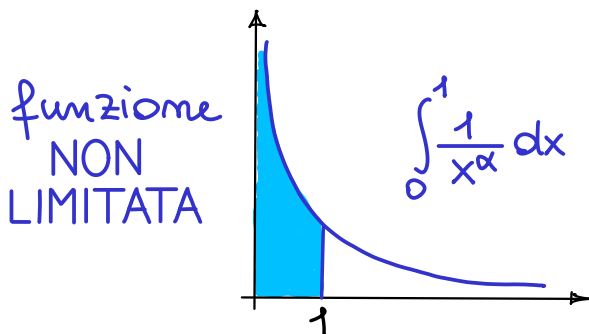
$$= n! I(0) = n! \cdot 1 = n!$$

- $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx$ è convergente se e solo se $\alpha < 0$.

Infatti se $\alpha = 0$, $\int_0^{+\infty} 1 dx = [x]_0^{+\infty} = +\infty$. Se $\alpha \neq 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} - 1 \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

- $\frac{1}{x^\alpha}$ è continua in $(0, +\infty)$.



Se $\alpha = 1$ allora

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\log(x)]_{0^+}^1 = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\log(x)]_1^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

Se $\alpha \neq 1$ allora

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{0^+}^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

Per traslazione e simmetria, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx \quad \text{e} \quad \int_{x_0-1}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx$$

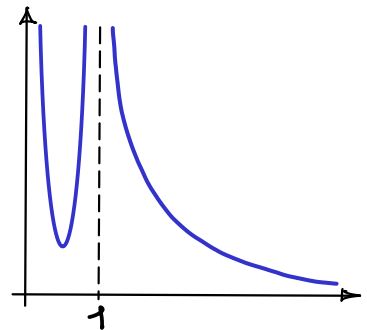
Sono convergenti se e solo se $\alpha < 1$.

- $\frac{1}{x|\log(x)|^\beta}$ è continua in $(0,1) \cup (1,+\infty)$.
 $\leftarrow \beta \neq 0$

Dato che

$$\int_a^b \frac{1}{x|\log(x)|^\beta} dx = \int_{\log(a)}^{\log(b)} \frac{1}{|t|^\beta} dt$$

$t = \log(x)$



allora

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|\log(x)|^\beta} dx = \int_{-\infty}^{-\log(2)} \frac{1}{|t|^\beta} dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \beta > 1 \end{cases}$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x|\log(x)|^\beta} dx = \int_{-\log(2)}^0 \frac{1}{|t|^\beta} dt = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \beta < 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x|\log(x)|^\beta} dx = \int_0^{\log(2)} \frac{1}{|t|^\beta} dt = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \beta < 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x|\log(x)|^\beta} dx = \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{|t|^\beta} dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \beta > 1 \end{cases}$$