

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 21

TECNICHE DI INTEGRAZIONE

1) PER SOSTITUZIONE

Se $F' = f$ allora

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + c = F(g(x)) + c.$$

$t = g(x)$
 $dt = d(g(x)) = g'(x) dx$

$\begin{matrix} \text{S} \\ \curvearrowright \\ d(\cdot) \\ \curvearrowleft \\ \text{D} \end{matrix}$ DIFFERENZIALE

Tale tecnica segue direttamente dalla regola della derivazione di una funzione composta.

ESEMPI

$-(\cos(x))'$

$$\bullet \int t g(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\log|t| + c$$

$t = \cos(x), dt = -\sin(x) dx$

$$= -\log|\cos(x)| + c.$$

$$\bullet \int x \sqrt{2x^2 + 3} dx = \int t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$t = 2x^2 + 3, dt = 4x dx$

$$= \frac{1}{6} (2x^2 + 3)^{\frac{3}{2}} + c.$$

$$\bullet \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{t + t^{-1}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$t = e^x, x = \log(t), dx = \frac{dt}{t}$

$$= \arctg(t) + c = \arctg(e^x) + c.$$

2) PER PARTI

$$\int \underbrace{f(x)g'(x)}_{d(g(x))} dx = f(x)g(x) - \int g(x) \underbrace{f'(x)dx}_{d(f(x))}.$$

Tale tecnica segue direttamente dalla regola della derivazione di un prodotto di funzioni.

ESEMPI

$$\begin{aligned} \bullet \int \log(x) \underbrace{dx}_{\frac{dx}{x}} &= \log(x) \cdot x - \int x d(\log(x)) \\ &= \log(x) \cdot x - \int \cancel{x} \frac{dx}{\cancel{x}} \\ &= \log(x) \cdot x - x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int \arctg(x) dx &= \arctg(x) \cdot x - \int x \underbrace{d(\arctg(x))}_{\frac{dx}{1+x^2}} \\ &= \arctg(x) \cdot x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ \begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \end{matrix} \rightarrow &= \arctg(x) \cdot x - \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2} \\ &= \arctg(x) \cdot x - \frac{1}{2} \log|t| + c \\ &= \arctg(x) \cdot x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c. \end{aligned}$$

$$\bullet \int x e^x dx = \begin{cases} \int e^x d(\frac{x^2}{2}) = e^x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \overbrace{d(e^x)}^{e^x dx} & ? \\ \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x \overbrace{d(x)}^{dx} \\ = x e^x - e^x + c. \end{cases}$$

$$\bullet \int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x d(x^2)$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + c)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c. \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{il numero che} \\ \text{moltiplica } c \\ \text{può essere omissso} \end{array}$$

OSSERVAZIONE

Se P è un polinomio di grado n allora

$$\int P(x) e^x dx = \int P(x) d(e^x) = P(x) e^x - \int e^x d(P(x))$$

$$= P(x) e^x - \int P'(x) e^x dx$$

$$= P(x) e^x - \int P'(x) d(e^x)$$

$$= P(x) e^x - P'(x) e^x + \int e^x d(P'(x))$$

$$= P(x) e^x - P'(x) e^x + \int P''(x) e^x dx$$

$$\vdots$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k P^{(k)}(x) \right) e^x + c.$$

$$\bullet \int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) - \int x d(\arcsin(x))$$

$$= x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\begin{matrix} t=1-x^2 \\ dt=-2x dx \end{matrix} \rightarrow x \arcsin(x) + \frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt$$

$$= x \arcsin(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\bullet \int \sin(x) e^x dx = \int \sin(x) d(e^x)$$

$$= \sin(x) e^x - \int e^x \overbrace{d(\sin(x))}^{\cos(x) dx}$$

$$= \sin(x) e^x - \int \cos(x) e^x dx$$

$$= \sin(x) e^x - \int \cos(x) d(e^x)$$

$$= \sin(x) e^x - \cos(x) e^x + \int e^x \overbrace{d(\cos(x))}^{-\sin(x) dx}$$

$$= \sin(x) e^x - \cos(x) e^x - \boxed{\int \sin(x) e^x dx}.$$

Quindi

integrale iniziale

$$\int \sin(x) e^x dx = \frac{1}{2} (\sin(x) - \cos(x)) e^x + C.$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int \sqrt{1-x^2} dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int x d(\sqrt{1-x^2}) \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{\pm 1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \boxed{\int \sqrt{1-x^2} dx} + \arcsin(x).
\end{aligned}$$

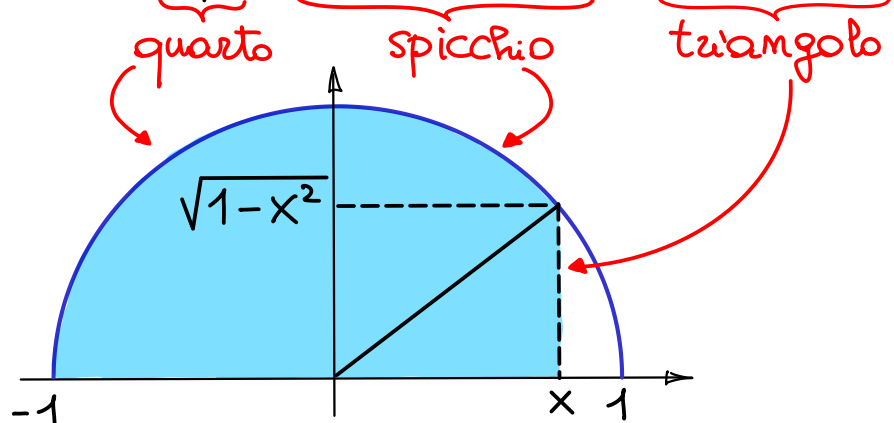
integrale iniziale

Quindi

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)) + c.$$

La corrispondente funzione integrale calcola l'area di una parte di un semicerchio di raggio 1:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t) \right]_{-1}^x \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$



$$\bullet \int e^x \log(1+e^{2x}) dx = \int \log(1+t^2) dt$$

$\uparrow$
 $t=e^x, dt=e^x dx$

$$= t \log(1+t^2) - \int t d(\log(1+t^2))$$

$$= t \log(1+t^2) - \int t \frac{2t}{1+t^2} dt$$

$$= t \log(1+t^2) - 2 \int \frac{\pm 1+t^2}{1+t^2} dt$$

$$= t \log(1+t^2) - 2 \int (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt$$

$$= t \log(1+t^2) - 2t + 2 \operatorname{arctg}(t) + c$$

$$= e^x \log(1+e^{2x}) - 2e^x + 2 \operatorname{arctg}(e^x) + c.$$