

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 20

PRIMITIVE

Una funzione F si dice una PRIMITIVA di f in $A \subseteq \mathbb{R}$ se F è derivabile in A e

$$\forall x \in A \quad F'(x) = f(x).$$

ESEMPI

- $\frac{x^3}{3}, \frac{x^3}{3} + 4, \frac{x^3}{3} - 2$ sono primitive di x^2 in $\mathbb{R}$
- $F(x) = \log|x-1| + \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } x > 1 \\ 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ è una primitiva

di $f(x) = \frac{1}{x-1}$ in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Infatti se $x > 1$ allora

$$F'(x) = \left(\log(x-1) - \frac{1}{2} \right)' = \frac{1}{x-1}$$

mentre se $x < 1$ allora

$$F'(x) = \left(\log(-x+1) + 3 \right)' = \frac{1}{-x+1} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1}.$$

OSSERVAZIONE

Se F è una primitiva di f allora

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

e quindi anche $F + c$ è una primitiva di f .
Anzi TUTTE le primitive di f hanno questa forma: se G è un'altra primitiva di f allora

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

e quindi $F(x) - G(x)$ è identicamente costante su ogni intervallo.

PRIMITIVE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

f	F
x^b $b \neq -1$	$\frac{x^{b+1}}{b+1}$
$\frac{1}{x+a}$	$\log x+a $
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

f	F
$\frac{1}{x^2+a^2}$ $a > 0$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $a > 0$	$\operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)$ $-\operatorname{arccos}\left(\frac{x}{a}\right)$

Le corrispondenze nella tabella si verificano direttamente con la definizione.

Ad esempio: se $a > 0$

$$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}$$

e

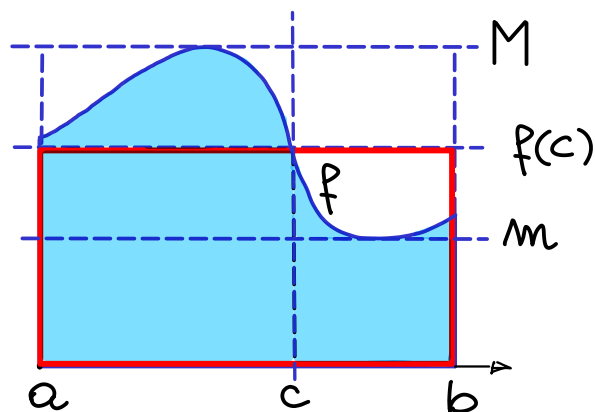
$$\left(\operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\cancel{\sqrt{a^2}}}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{a}}.$$

TEOREMA (DELLA MEDIA INTEGRALE)

Se f è continua in $[a, b]$ allora $\exists c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

media integrale
di f in $[a, b]$



dim. Sia σ la suddivisione data dai soli due punti $x_0 = a < b = x_1$. Allora

$$m(b-a) = \lambda(f, \sigma) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \sigma) = M(b-a)$$

ossia

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

dove m e M sono rispettivamente il valore minimo e massimo di f in $[a, b]$. Tali valori esistono per il teorema di Weierstrass.

Dato che per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori in $[m, M]$, allora

$$\exists c \in [a, b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

□

TEOREMA (FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e
sia I la FUNZIONE INTEGRALE

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Allora

1) I è derivabile in $[a, b]$ e $I'(x) = f(x)$ ossia
 I è una primitiva di f .

2) Se F è una qualunque primitiva di f allora

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

dim.

1) Sia $x \in [a, b]$ e sia $h \neq 0$ tale che $x+h \in [a, b]$.

Allora il rapporto incrementale di I è

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c(h))$$

per il teorema della media
integrale $\exists c(h) \in [x, x+h]$

Se $h \rightarrow 0$, per doppio confronto, $c(h) \rightarrow x$, e per
la continuità di f in x ,

$$f(c(h)) \rightarrow f(x).$$

Quindi il limite rapporto incrementale di I esiste ed è uguale a $f(x)$:

$$I'(x) = f(x).$$

2) Se F è una primitiva di f allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = I(x) + c$ e

$$F(b) - F(a) = I(b) + \cancel{c} - \underbrace{I(a) - \cancel{c}}_{=0} = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

OSSERVAZIONE

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che il problema del calcolo dell'INTEGRALE DEFINITO

con gli estremi
di integrazione $\int_a^b f(x) dx$

è ridotto alla ricerca di F , una primitiva di f , e al calcolo della variazione di F agli estremi $F(b) - F(a)$.

Per la ricerca di F introduciamo la notazione di INTEGRALE INDEFINITO

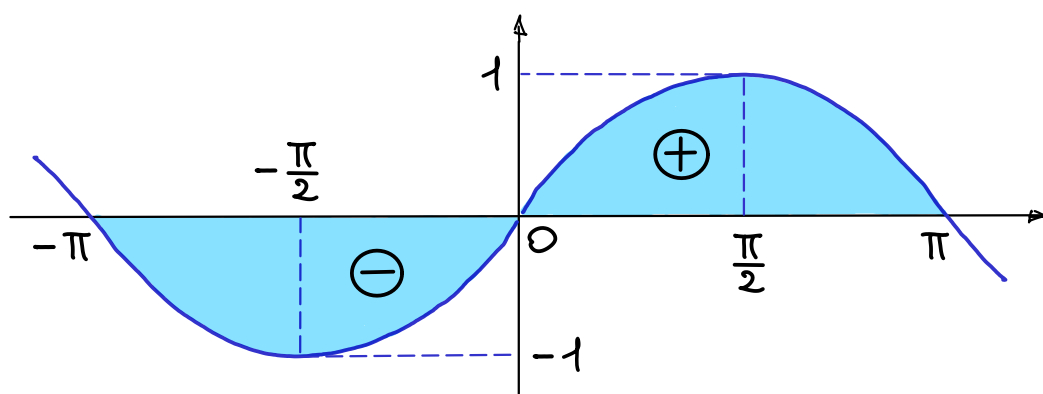
senza gli estremi
di integrazione $\int f(x) dx = \overbrace{F(x) + c}^{\text{TUTTE le primitive}}$
costante
orbitaria

ESEMPI

- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = 1 - 1 = 0$$



- $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$ perché $(-e^{-x})' = e^{-x}$

$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-b}$$

Osserviamo che $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = 1$.

