

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 19

CALCOLO INTEGRALE

All'origine del calcolo integrale c'è il METODO DI ESAUSTIONE-COMPRESSIONE per il calcolo dell'area del cerchio usato da ARCHIMEDE.

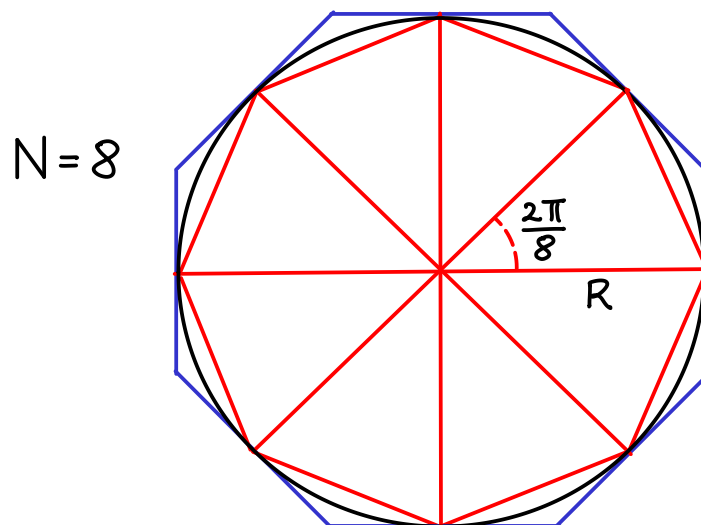
L'idea è di calcolare tale area usando delle figure geometriche le cui aree sono semplici da calcolare ossia poligoni regolari (unioni di triangoli).

Dato un cerchio si inscrivono (esaustione) e si circoscrivono (compressione) dei poligoni regolari di N lati. Allora $\forall N \geq 3$,

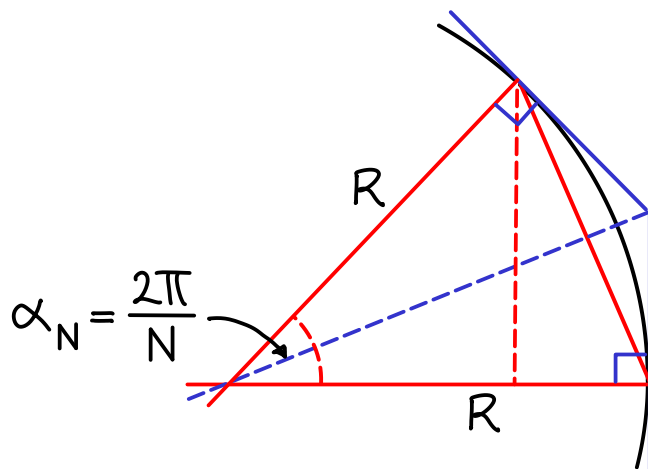
$$\begin{array}{c} \text{area del poligono} \rightarrow s_N \leq A \leq S_N \leftarrow \text{area del poligono} \\ \text{inscritto di } N \text{ lati} \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \text{circoscritto di } N \text{ lati} \\ \quad \quad \quad \text{area del cerchio} \end{array}$$

e in senso moderno definiamo l'area del cerchio A come

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = A = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$



Infatti



per $N \rightarrow \infty$,

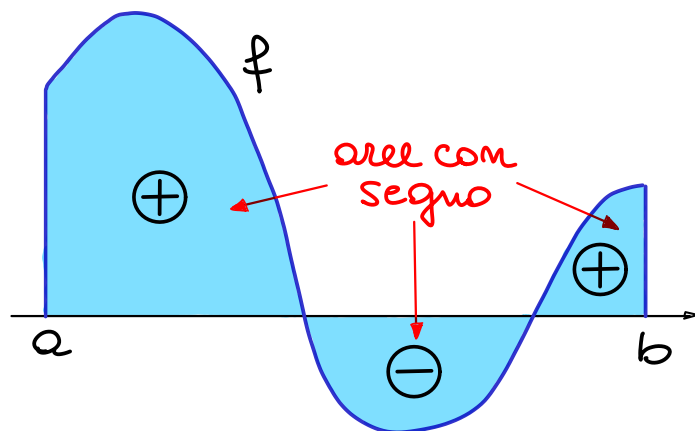
$$S_N = N \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin(\alpha_N) = \pi R^2 \left(\frac{\sin(\frac{2\pi}{N})}{\frac{2\pi}{N}} \right) \xrightarrow{\rightarrow 1} \pi R^2$$

$$S_N = N \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \tan\left(\frac{\alpha_N}{2}\right) = \pi R^2 \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{N})}{\frac{\pi}{N}} \right) \xrightarrow{\rightarrow 1} \pi R^2$$

e quindi per doppio confronto $A = \pi R^2$.

Adattiamo il metodo del calcolo dell'area del cerchio al seguente insieme

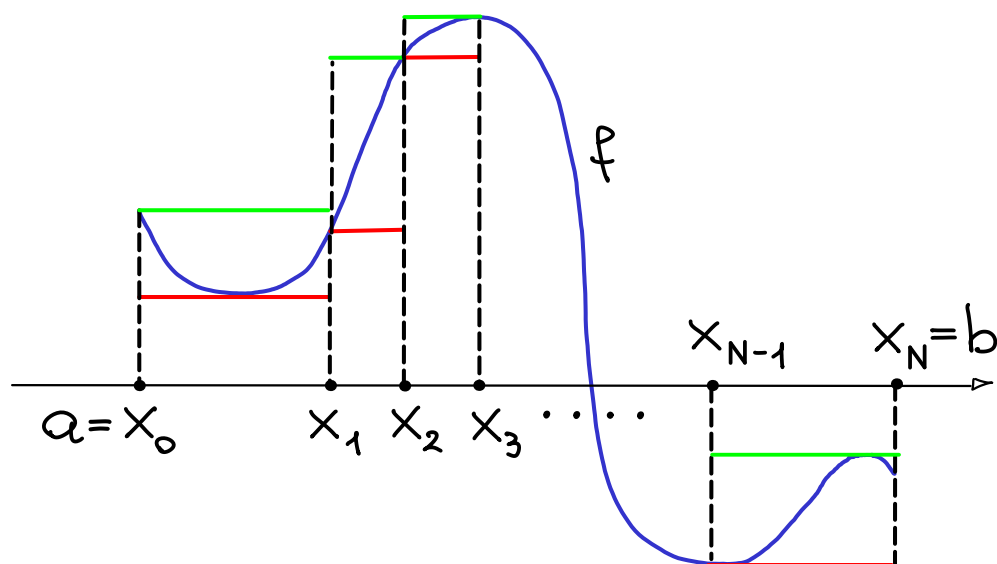
$$T = \left\{ (x, y) : x \in [a, b], y \in \begin{cases} [0, f(x)] & \text{se } f(x) \geq 0 \\ [f(x), 0] & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases} \right\}$$



dove $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata.

Per $N \geq 1$ sia σ una SUDDIVISIONE di $[a, b]$ data dai punti:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N = b.$$



La SOMMA INFERIORE di f rispetto a σ è

$$\lambda(f, \sigma) = \sum_{k=1}^N m_k (x_k - x_{k-1})$$

← Somma delle aree con segno dei rettangoli inscritti

dove $m_k = \inf \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$.

La SOMMA SUPERIORE di f rispetto a σ è

$$S(f, \sigma) = \sum_{k=1}^N M_k (x_k - x_{k-1})$$

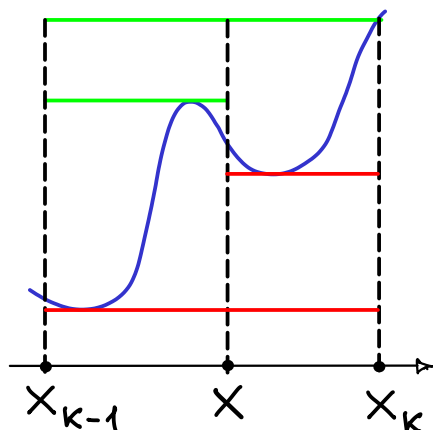
← Somma delle aree con segno dei rettangoli circoscritti

dove $M_k = \sup \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$.

Allora per costruzione, per ogni suddivisione σ

$$\lambda(f, \sigma) \leq S(f, \sigma).$$

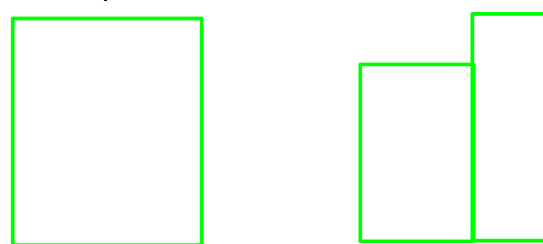
Aggiungendo un punto x ad una suddivisione σ si ha che



$$\lambda(f, \sigma) \leq \lambda(f, \sigma \cup \{x\})$$



$$S(f, \sigma) \geq S(f, \sigma \cup \{x\})$$



Così $\forall \sigma_1, \sigma_2$ suddivisioni di $[a, b]$

$$\lambda(f, \sigma_1) \leq \lambda(f, \sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S(f, \sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S(f, \sigma_2)$$

e quindi

$$\sup \{ \lambda(f, \sigma) : \sigma \text{ sudd. di } [a, b] \} \leq \inf \{ S(f, \sigma) : \sigma \text{ sudd. di } [a, b] \}.$$

f si dice INTEGRABILE in $[a, b]$ secondo RIEMANN-DARBOUX se vale l'uguale

$$\sup \{ \lambda(f, \sigma) : \sigma \text{ sudd. di } [a, b] \} = \inf \{ S(f, \sigma) : \sigma \text{ sudd. di } [a, b] \}.$$

e il valore comune definisce

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{Somma} \int_a^b f(x) dx$$

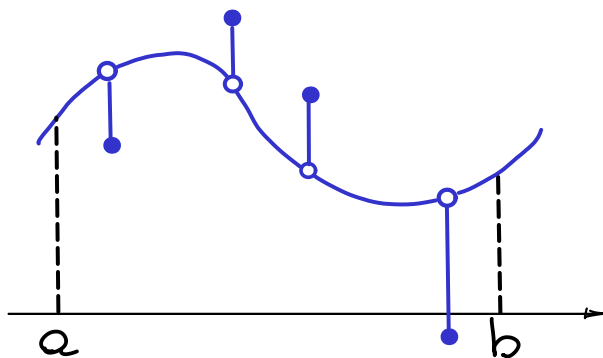
che indica l'INTEGRALE DI f DA a A b .
 a e b sono gli estremi di integrazione.

TEOREMA

Se f è continua in $[a, b]$ allora f è integrabile in $[a, b]$.

OSSERVAZIONI

1) Se f è integrabile in $[a, b]$ allora rimane integrabile se f viene modificata in un numero finito di punti e il suo integrale da a a b è lo stesso.



2) Se f è integrabile in $[a, b]$ allora per convenzione si pone

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

3) Additività rispetto all'intervallo di integrazione: se f è integrabile in $[a, b]$ allora per ogni $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4) Linearità: se f e g sono integrabili in $[a, b]$ allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

5) Monotonia: se f e g sono integrabili in $[a, b]$ e $\forall x \in [a, b] \ f(x) \leq g(x)$ allora

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Inoltre dato che $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, si ha che

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

ossia

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

6) Se f è continua in $[a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{N}\right)$$

suddivisione
uniforme
 $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N}$

Ad esempio, se $f(x) = x^2$ e $[a, b] = [0, 1]$ allora

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3} = \frac{1}{3}.$$

$\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3}$ si verifica
per induzione